

## 1. INTRODUCERE

### 1.1 Stadiul actual al roboticii

1921 Karel Capek „Roboții industriali ai lui Rossum“

1943 Isaac Asimov „I am a Robot“

1954 Kernward – UK Brevet – Manipulator cu două brațe

1956 **George C. Devol – USA Brevet – Dispozitiv de transfer automat**

1959 **Joseph Engelberger** Cumpără brevetul de la Devol și realizează în anul 1960 robotul Unimate la firma Unimation Inc., firmă ce va lucra în profit de abia din anul 1973.

1968 38 roboți Unimate la linia de sudare a caroseriilor din Lordstown

1968 Kawasaki Heavy Industries a cumpărat licența Unimate

1971 **Primul robot japonez la Nissan Motors**

1971 Fiat – Italia / Torino Linia de sudat în puncte caroserii

1971 ASEA – Suedia Primul robot cu acționare electrică

1974 RV – 70 Regie Renault / Franța robot cu acționare electrică

1976 Prof. Chr. Pelecudi – UP București / „Introducere în robotică” primul articol de robotică apărut în România – MTM 76 Timișoara / Reșița

1979 „Colectiv Multidisciplinar de Roboți Industriali” la Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara.

**1982, 8 februarie REMT – 1 Primul robot industrial românesc,**

**Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara și Electromotor Timișoara**

**Distins cu Premiul „TRAIAN VUIA” al Academiei Române**

- 1982 **Kovacs Fr. Cojocaru G – “Manipulatoare, Roboți și aplicațiile lor industriale” prima carte de robotică din România.**
- 1983 RIP 6,3 – Automatica București Implementat la Autobuzul București
- 1985 RIC – 25, RIS – 63 ICSIT TITAN București în cadrul Programului Național de Roboți Industriali
- 1986 **Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara și Electro-Timiș Timișoara**  
 Familie de Roboți cu:
- |                     |          |          |         |
|---------------------|----------|----------|---------|
| Aționare electrică  | mR 2,5   | MRE 12,5 | MAE 100 |
| Aționare pneumatică | MRP 12,5 | MAP 100  |         |
| Aționare hidraulică | RH 1kN   |          |         |
- 1987 **Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara și IMMUM Baia Mare**  
 Manipulator sincron – MASIN<sub>h</sub> 500 Expus la **TIB’87** și distins  
 cu **Medalia de aur**
- 1988 **Institutul Politehnic „Traian Vuia” Timișoara și IMMUM Baia Mare**  
 Robotul Portal – ROPOS 50 Expus la **TIB’88** și distins cu  
**Medalia de aur**

## 1.2 Tendințe de dezvoltare ale roboticii

- creșterea gradului de autonomie ale roboților
- scăderea gradului de structurare al mediului

### a) ROBOȚI INDUSTRIALI 1960 –

- mediu structurat
- obiecte situate în puncte de precizie ale mediului
- sarcini predefinite prin program
- executarea automată de programe explicite

### b) ROBOȚI de PRESTĂRI SERVICII 1984 –

- model al universului bazat pe prelevate din mediu
- percepție artificială
- procesare informațională multisenzorială
- programe implicite
- planificarea traiectoriei (traiectorie dinamică)

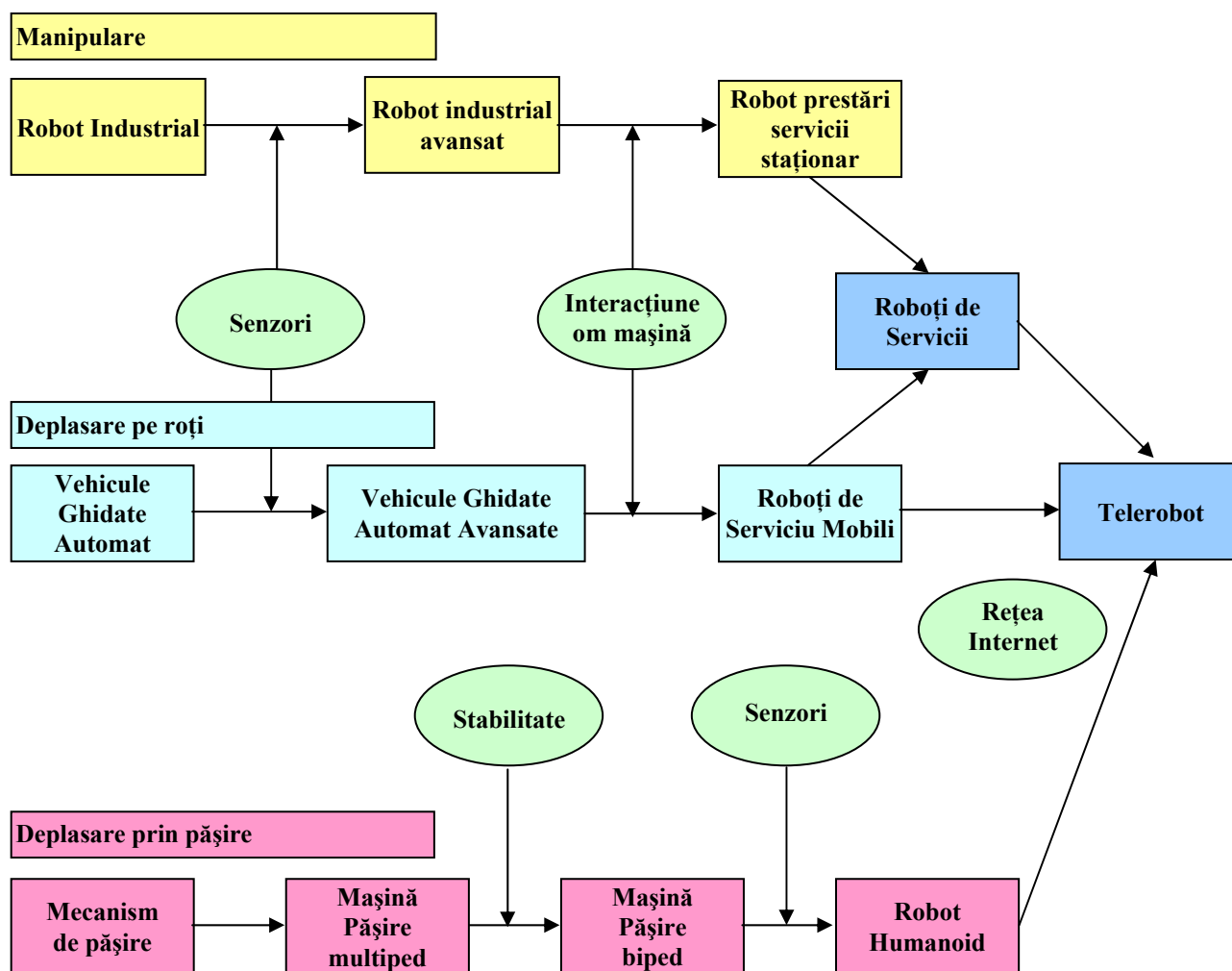
### b) ROBOȚI PERSONALI 2003 –

- capacități de comunicare cu mediul
- utilizare de modele pentru înțelegerea mediului
- planificarea automată a întregului program
- funcții de supraveghere a întregii activități

**Robot staționar – Manipulare**

**Vehicul ghidat automat (VGA) – Deplasare prin rulare**

**Mașini pășitoare – Deplasare prin pășire**



**Fig. 1.1 Dezvoltarea Roboticii**

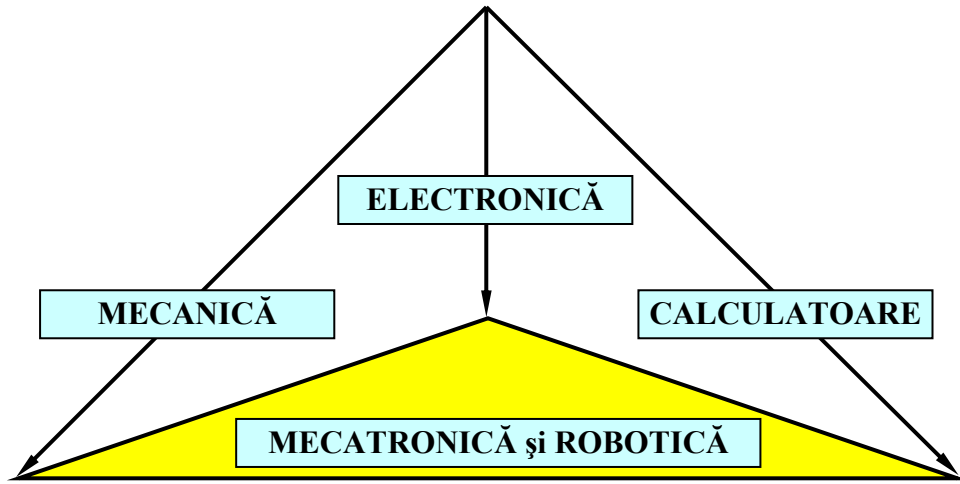
### 1. ROBOȚI INDUSTRIALI:

- Robot Industrial (Manipulare) + Senzori = Asamblare automată;
- Roboți inteligenți staționari; Pe viitor Roboți de dezasamblare

### 2. VEHICULE GHIDATE AUTOMAT:

- Fără elemente de inteligență artificială = Roboți Mobili pentru Transportul Materialelor pe o traiectorie ghidată în mediu structurat;
- cu Senzori (Video, de Proximitate) își aleg traiectoria într-un mediu nestructurat.

### 3. MAȘINI PĂȘITOARE multi-ped și biped

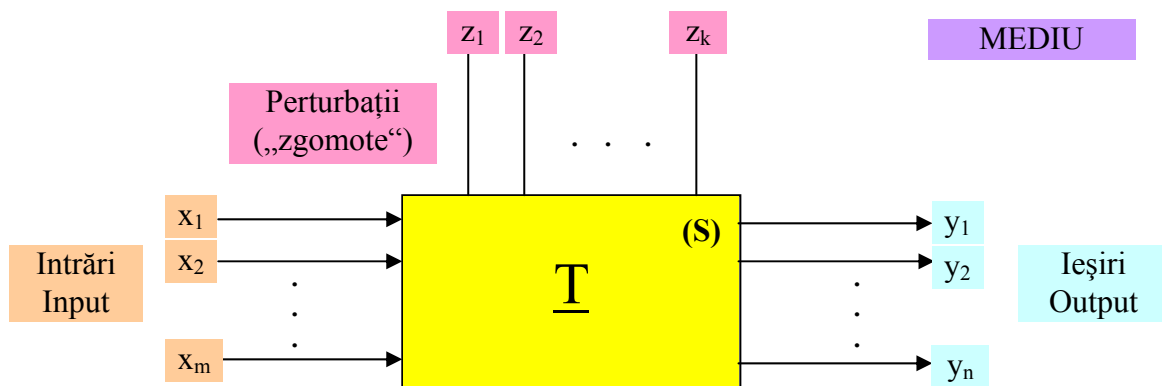


**Fig. 1.2 Mecatronica și Robotica**

## 2. NOȚIUNI DE TEORIA SISTEMELOR

### 2.1 Clasificarea sistemelor

- **Sistem:** ansamblu de elemente și relațiile (legăturile) dintre ele.
- **Mediu:** ansamblul elementelor care nu fac parte din sistem.
- **Legături orientate:** Intrări (INPUT) sau Ieșiri (OUTPUT)
- **Legături neorientate:** perturbații („zgomote”).
- **Sistem închis:** nu are legături cu mediul său.
- **Sistem deschis:** are legături orientate sau neorientate cu mediul său.
- **Sistem simplu:** are puține elemente și legături între acestea.
- **Sistem complex:** are multe elemente și legături între ele.
- **Sistem concret:** are elemente materiale.
- **Sistem abstract:** nu are elemente materiale.
- **Sistem natural:** există fără intervenția omului.
- **Sistem artificial:** este creat de om.
- **Sistem determinist:** are legături orientate.
- **Sistem stohastic:** are legături neorientate.



**Fig. 2.1 Sistem deschis**

## 2.2 Funcția de transfer $\underline{T}$

Funcția de transfer: asigură transformarea mărimii de intrare  $\underline{X} = \underline{X}(t)$  în mărimi de ieșire  $\underline{Y} = \underline{Y}(t)$  conform relației:

$$\underline{Y} = \underline{T} \cdot \underline{X} \quad (2.1)$$

Vectorul intrărilor  $\underline{X} = \underline{X}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)^T$

Vectorul ieșirilor  $\underline{Y} = \underline{Y}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$

Matricea de transfer  $\underline{T}$

Vectorul perturbațiilor  $\underline{Z} = \underline{Z}(z_1, z_2, z_3, \dots, z_k)^T$

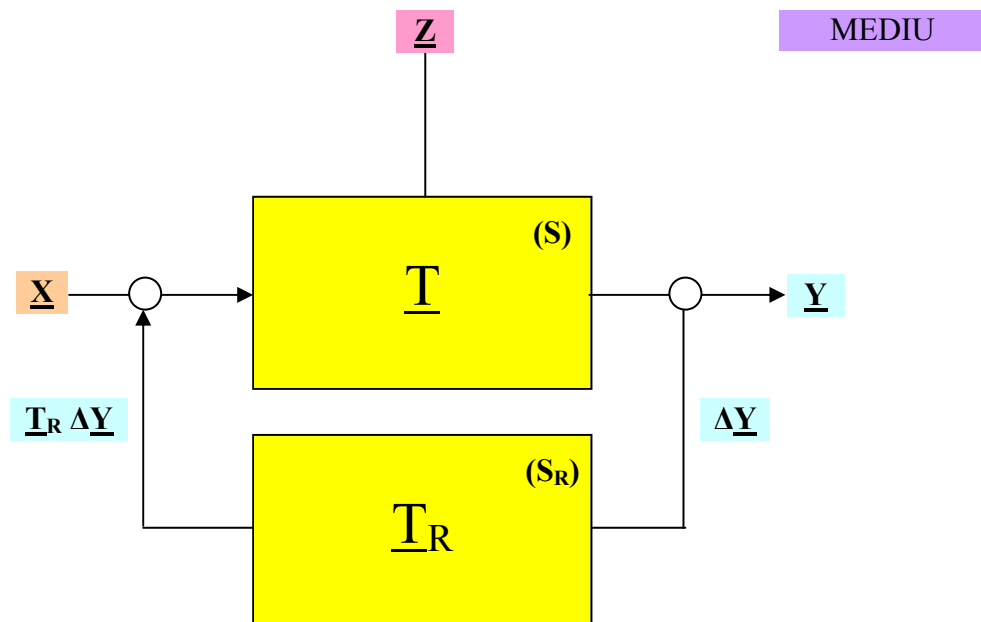


Fig. 2.2 Sistem cu buclă de reacție

$\underline{Z}$  – caracter aleatoriu

$\underline{Y}'$  – Vectorul ieșirilor perturbate

$$\underline{Y}' = \underline{T} (\underline{X} + \underline{Z}) \quad (2.2)$$

Bucula de reacție ( $S_R$ ) asigură eliminarea perturbațiilor.

**Vectorul erorilor** = intrarea în bucla de reacție

$$\Delta \underline{Y} = \underline{Y}' - \underline{Y} \quad (2.3)$$

$\underline{T}_R \cdot \Delta \underline{Y}$  – ieșirea din bucla de reacție

$\underline{T}_R$  – funcția de transfer a buclei de reacție

$$\underline{Y} = \underline{T} (\underline{X} + \underline{Z} + \underline{T}_R \cdot \Delta \underline{Y}) \quad (2.4)$$

### Ierarhizarea sistemelor

Sistemul de rang „R” conține unul sau mai multe sisteme de rang „R-1”.

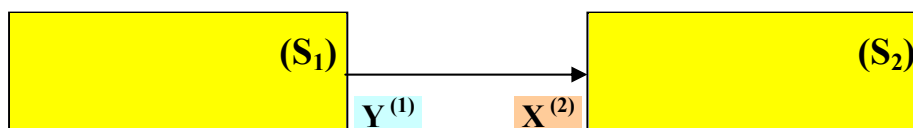
$$S^{R-1} \in S^R \quad S^R \in S^{R+1} \quad (2.5)$$

Sistemul de rang „R” este un element al unui sistem de rang „R+1”.

**Ierarhizarea sistemelor** = cunoașterea structurii unui sistem și a legăturilor dintre subsistemele acestuia.

### 2.3 Cuplarea a două sisteme

Două sisteme sunt cuplate dacă cel puțin o ieșire a unuia este o intrare în celălalt.



**Fig. 2.3 Două sisteme cuplate**

$$\underline{X}^{(2)} = [x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2m}]^T \quad (2.6)$$

$$\underline{Y}^{(1)} = [y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots, y_{1n}]^T$$

$$x_{2p} = y_{1q} \quad p = 1 \dots m \quad q = 1 \dots n \quad (2.7)$$

**Matricea de cuplare** = Matrice „m x n” cu „m” intrări în  $S_2$  și „n” ieșiri din  $S_1$ .

$$\underline{K}_{12} = [e_{pq}] \quad p = 1 \dots m \quad q = 1 \dots n \quad (2.8)$$



$$\underline{\mathbf{K}}_{12} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1q} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2q} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ e_{p1} & e_{p2} & \dots & e_{pq} & \dots & e_{pn} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mq} & \dots & e_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$e_{pq} = \begin{cases} 1 & \forall x_{2p} = y_{1q} \quad p = \overline{1, m} \\ 0 & \forall x_{2p} \neq y_{1q} \quad q = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.10)$$

$e_{pq} = 1$       există o legătură între  $S_1$  și  $S_2$

$e_{pq} = 0$       nu există o legătură între  $S_1$  și  $S_2$

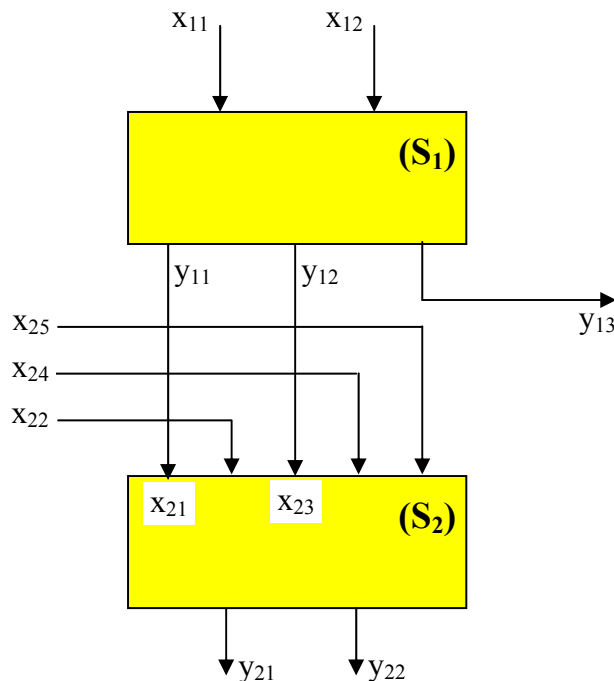
### Modelul matematic al cuplării sistemelor $S_1$ și $S_2$

$$\underline{\mathbf{X}}^{(2)} = \underline{\mathbf{K}}_{12} \cdot \underline{\mathbf{Y}}^{(1)} \quad (2.11)$$

#### EXEMPLUL 2.1

$$m = 5 \quad \underline{\mathbf{X}}^{(2)} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

$$n = 3 \quad \underline{\mathbf{Y}}^{(1)} = [1 \ 1 \ 0]^T$$



$$\underline{\mathbf{K}}_{12} = [e_{pq}]_{5 \times 3} \quad x_{21} = y_{11} \Rightarrow e_{11} = 1$$

$$x_{23} = y_{13} \Rightarrow e_{32} = 1$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 2.4 Cuplarea a două sisteme

Matricea de structură = matricea unui sistem de rang „R“ care conține "S<sub>i</sub>" subsistem

$i = 1 \dots n$ .

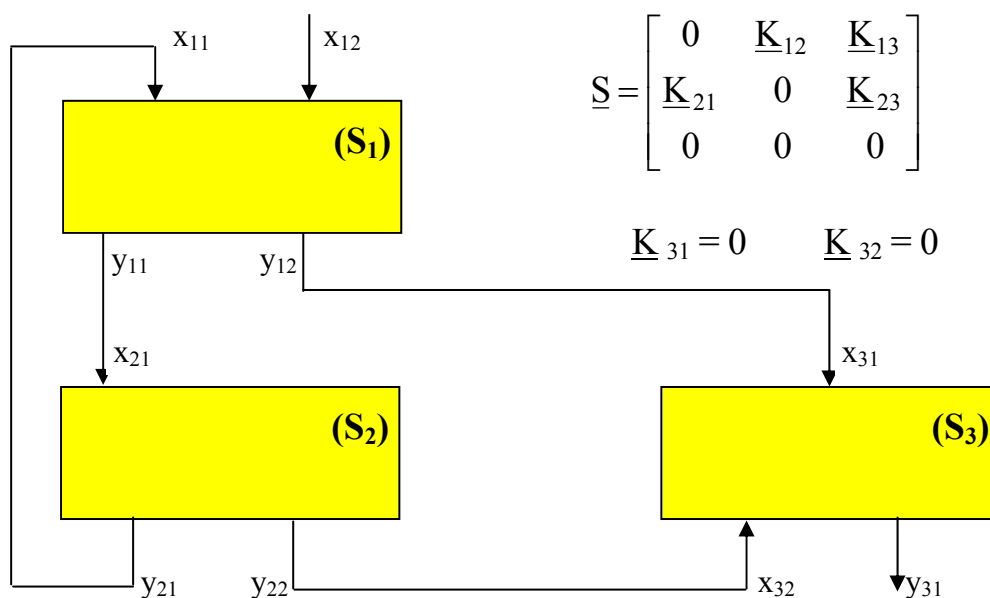
$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{K}_{12} & \underline{K}_{13} & \cdot & \underline{K}_{1n} \\ \underline{K}_{21} & 0 & \underline{K}_{23} & \cdot & \underline{K}_{2n} \\ \underline{K}_{31} & \underline{K}_{32} & 0 & \cdot & \underline{K}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{K}_{n1} & \underline{K}_{n2} & \underline{K}_{n3} & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$\underline{K}_{ij}$  – matricele de cuplare ale sistemelor "S<sub>i</sub>"       $\underline{K}_{ii} = 0$

Umărul maxim de cuplări       $N_{\max} = n(n-1)$       (2.13)

### EXEMPLUL 2.2

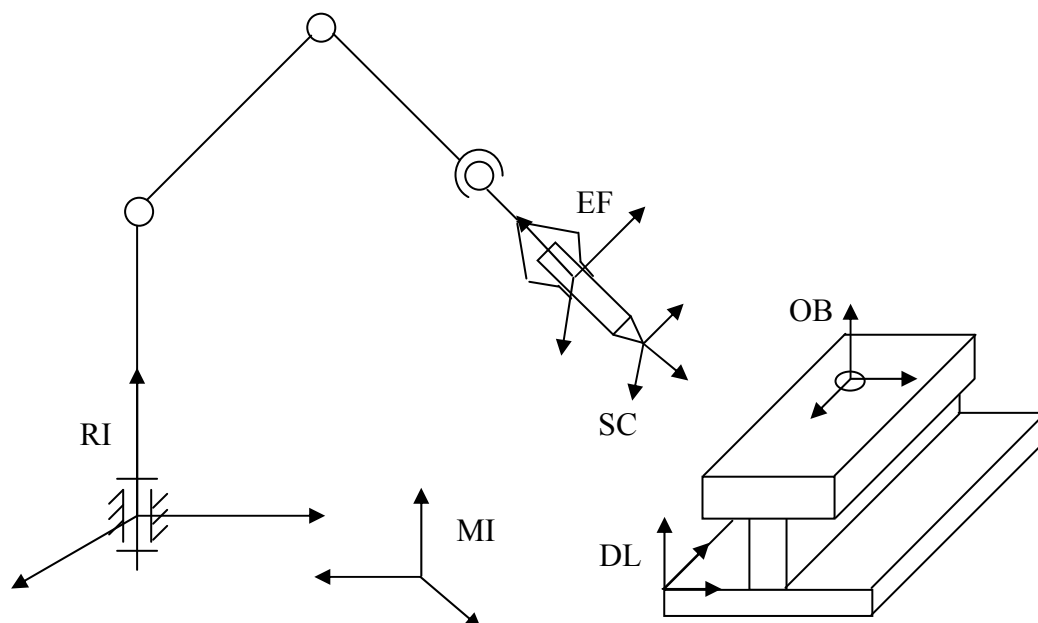
$$n = 3 \quad N_{\max} = 3 \cdot 2 = 6$$



**Fig. 2.5** Matricea de structură

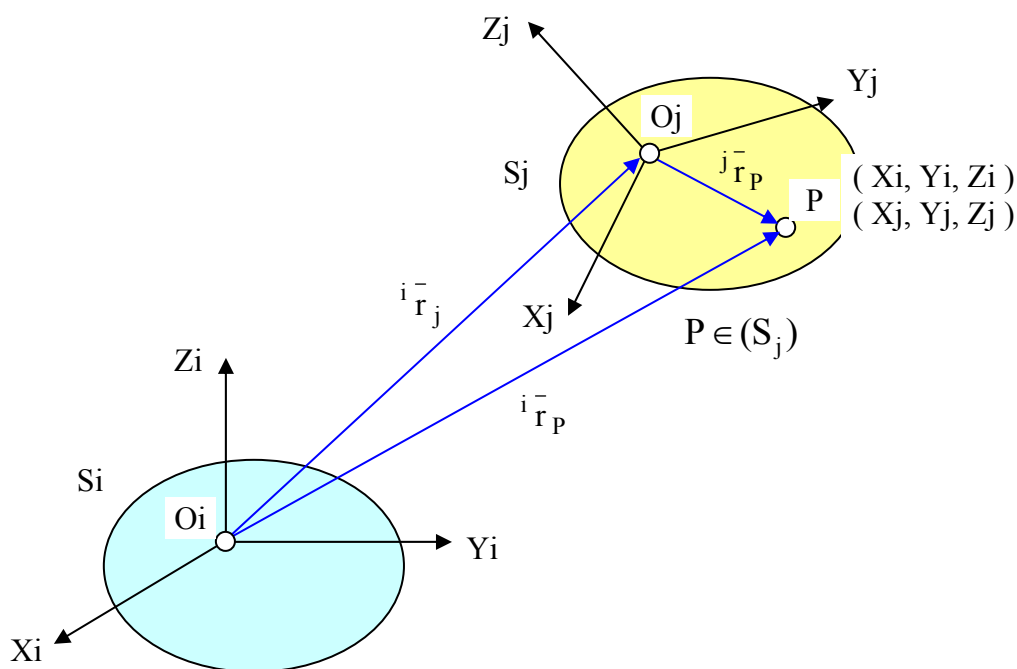
### 3. MODULUL MATEMATIC AL MANIPULĂRII

Celulă de fabricație = Mediu Industrial (MI) + Robot Industrial (RI) + Dispozitiv de Alimentare / Evacuare + Mașină - Unealtă + Dispozitiv de lucru (DL) + Obiect (OB)  
+ Sculă (SC) + Efecter Final (EF)



**Fig. 3.1 Modelul matematic al manipulării**

Manipulare = Corelarea elementelor lanțului tehnologic de către sistemul de comandă prin programe elaborate pe baza algoritmilor de calcul, transformări succesive de coordonate între diferite sisteme de referință.



**Fig. 3.2 Transformări de coordonate între două sisteme de referință**

$${}^i\bar{r}_p = {}^i\bar{r}_j + {}^j\bar{r}_p$$

$${}^i\bar{r}_p = {}^i\bar{r}_j + \underline{B}_{ij} \cdot {}^j\bar{r}_p \quad (3.1)$$

Vectorul de poziție al punctului P în sistemul solidului „ $S_i$ ”  ${}^i\bar{r}_p = (x_i \ y_i \ z_i)^T$

Vectorul de poziție al punctului P în sistemul solidului „ $S_j$ ”  ${}^j\bar{r}_p = (x_j \ y_j \ z_j)^T$  (3.2)

Vectorul de poziție al originii  $O_j$  în raport cu  $O_i$   ${}^i\bar{r}_j = (r_{0x} \ r_{0y} \ r_{0z})^T$

Matricea cosinusurilor directe  $\underline{B}_{ij} = [e_{ij}] \quad i = j = \overline{1,3}$

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \\ r_{0z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (3.1')$$

Cu quadri-vector  ${}^i\bar{r}_p = {}^i\underline{T}_j \cdot {}^j\bar{r}_p$  (3.3)

$${}^i\bar{\mathbf{r}}_p = (x_i \ y_i \ z_i \ 1)^T \quad {}^j\bar{\mathbf{r}}_p = (x_j \ y_j \ z_j \ 1)^T \quad \underline{\mathbf{T}}_{ij} = [a_{kl}] \quad k=1=\bar{1,3} \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.3')$$

### 3.1 Matricea de transformare omogenă

Exprimă situarea relativă a solidului  $S_j$  în raport cu solidul  $S_i$ .

${}^i\mathbf{R}_j =$  Matricea de rotație

${}^i\bar{\mathbf{r}}_j =$  Matricea de translație

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & r_{0x} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & r_{0y} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & r_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{R}_j & {}^i\bar{\mathbf{r}}_j \\ \mathbf{O}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

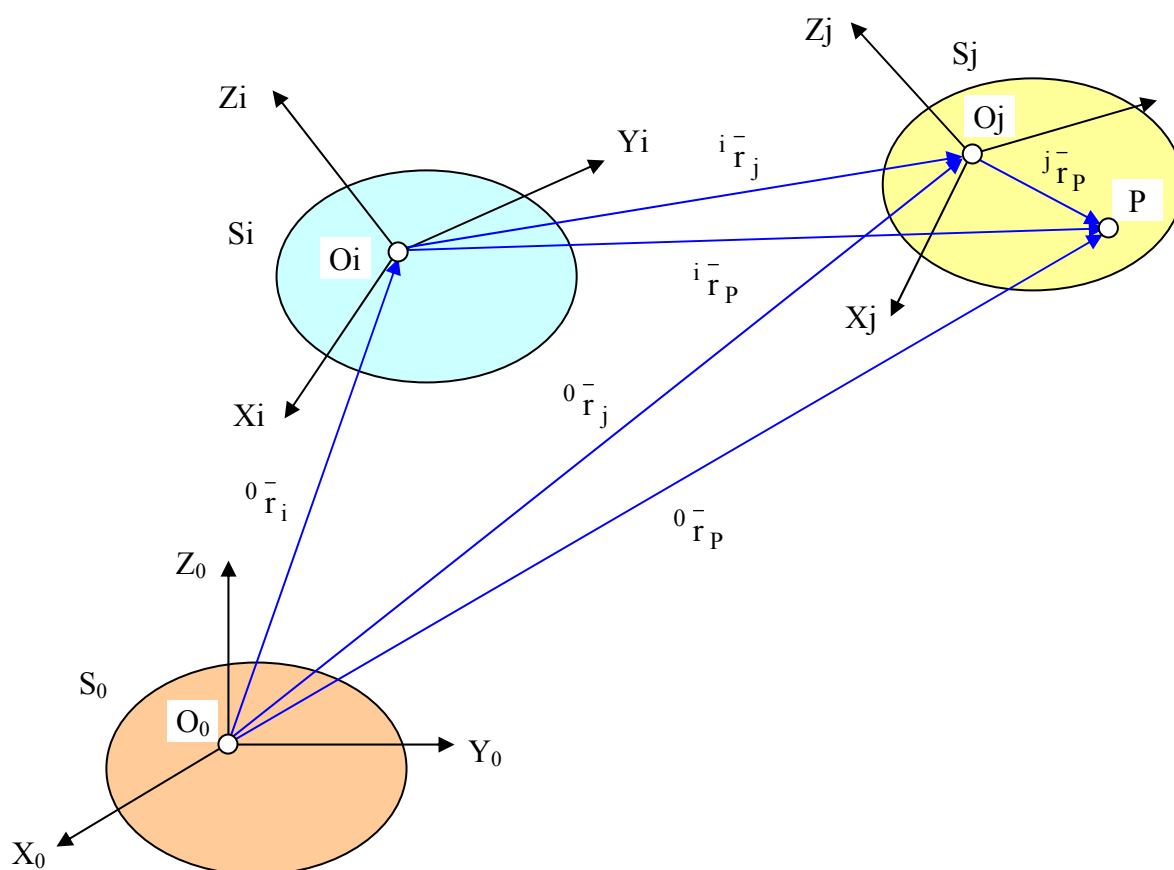


Fig. 3.3 Transformări de coordonate între trei sisteme de referință

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{r}_p &= {}^0\mathbf{T}_j \cdot {}^j\mathbf{r}_p \\ {}^0\mathbf{r}_p &= {}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\mathbf{r}_p \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{r}_p &= {}^i\mathbf{T}_j \cdot {}^j\mathbf{r}_p \\ {}^0\mathbf{r}_p &= {}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\mathbf{T}_j \cdot {}^j\mathbf{r}_p \end{aligned} \quad (3.7)$$

Relația de recurență  ${}^0\mathbf{T}_j = {}^0\mathbf{T}_i \cdot {}^i\mathbf{T}_j \quad i=j-1 \quad j=1..6$  (3.8)

$${}^{MI}\mathbf{T}_{SC} = {}^{MI}\mathbf{T}_{RI} \cdot {}^{RI}\mathbf{T}_{EF} \cdot {}^{EF}\mathbf{T}_{SC} \quad (3.9)$$

$${}^{MI}\mathbf{T}_{SC} = {}^{MI}\mathbf{T}_{DL} \cdot {}^{DL}\mathbf{T}_{OB} \cdot {}^{OB}\mathbf{T}_{SC}$$

$${}^{MI}\mathbf{T}_{SC} = {}^{MI}\mathbf{T}_{RI} \cdot {}^{RI}\mathbf{T}_{EF} \cdot {}^{EF}\mathbf{T}_{SC} = {}^{MI}\mathbf{T}_{DL} \cdot {}^{DL}\mathbf{T}_{OB} \cdot {}^{OB}\mathbf{T}_{SC} \quad (3.10)$$

${}^{MI}\mathbf{T}_{RI}$  = depinde de amplasarea robotului în hală

${}^{RI}\mathbf{T}_{EF}$  = funcție de coordonatele generalizate

${}^{EF}\mathbf{T}_{SC}$  = depinde de construcția efectorului final

${}^M\mathbf{T}_{DL}$  = depinde de amplasarea DL (MU) în hală

${}^{DL}\mathbf{T}_{OB}$  = depinde de situarea OB în DL

${}^{OB}\mathbf{T}_{SC}$  = se citește din desenul de execuție al OB

$${}^{RI}\mathbf{T}_{EF} = {}^{MI}\mathbf{T}_{RI}^{-1} \cdot {}^{MI}\mathbf{T}_{DL} \cdot {}^{DL}\mathbf{T}_{OB} \cdot {}^{OB}\mathbf{T}_{SC} \cdot {}^{EF}\mathbf{T}_{SC}^{-1} \quad (3.11)$$

Conform cerințelor tehnologice = situarea sculei în raport cu obiectul  $\Rightarrow$  Situarea

efectorului final în raport cu robotul  ${}^{OB}\mathbf{T}_{SC} \Rightarrow {}^R\mathbf{T}_{EF}$  prin modificarea

coordonatelor generalizate,  $q_i$ ,  $i=1..6$ ;

Pentru o cuplă de rotație  $q_i = \theta_i$ ;

Pentru o cuplă de translație  $q_i = d_i$ .

### 3.1.1 Matricele de transformare omogene elementare

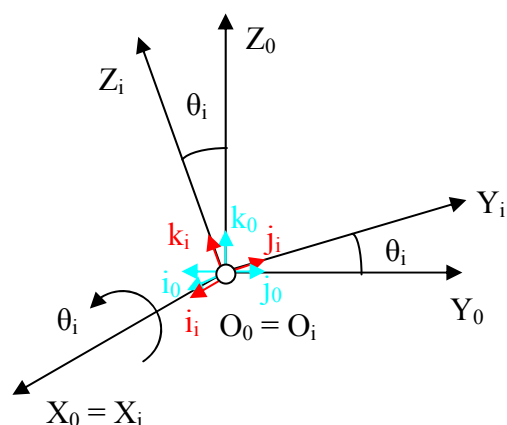


Fig. 3.4 Cuplă de rotație

$$\text{Rot}(x_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(y_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(z_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

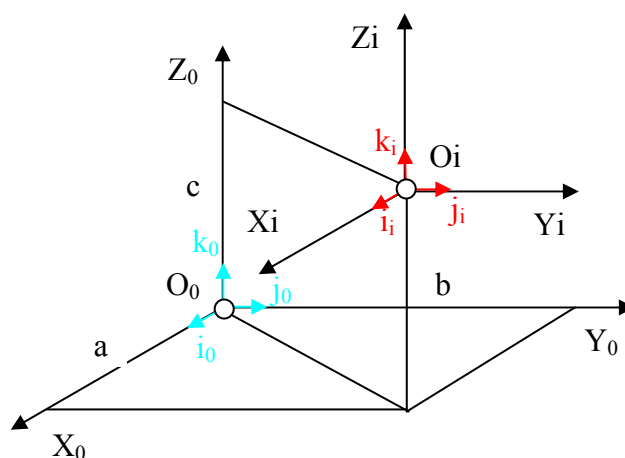
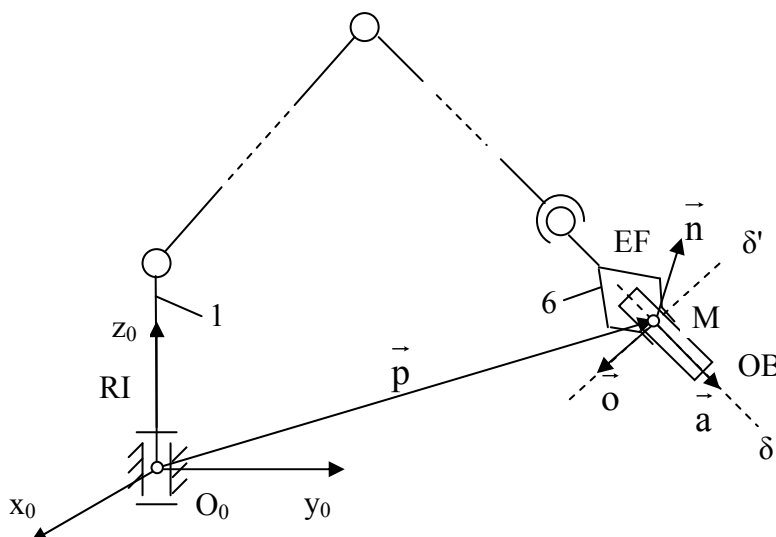


Fig. 3.5 Cuplă de translație

$$\text{Trans}(x_i, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\text{Trans}(y_i, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Trans}(z_i, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Matricea de situare



**Fig. 3.6 Matricea de situare**

Versor normal	$\bar{n} = \{n_x \quad n_y \quad n_z\}^T$	
Versor de orientare	$\bar{o} = \{o_x \quad o_y \quad o_z\}^T$	(3.14)
Versor de apropiere	$\bar{a} = \{a_x \quad a_y \quad a_z\}^T$	
Vectorul de poziție	$\bar{p} = \{p_x \quad p_y \quad p_z\}^T$	



$${}^0\underline{T}_j = {}^0\underline{T}_i \cdot {}^i\underline{T}_j \quad i=j-1 \quad j=1..6 \quad (3.15)$$

$${}^0\underline{T}_6 = {}^0\underline{T}_5 \cdot {}^5\underline{T}_6 \quad {}^0\underline{T}_5 = {}^0\underline{T}_4 \cdot {}^4\underline{T}_5 \quad {}^0\underline{T}_4 = {}^0\underline{T}_3 \cdot {}^3\underline{T}_4 \dots {}^0\underline{T}_2 = {}^0\underline{T}_1 \cdot {}^1\underline{T}_2$$

$${}^0\underline{T}_6 = {}^0\underline{T}_1 \cdot {}^1\underline{T}_2 \cdot {}^2\underline{T}_3 \cdot {}^3\underline{T}_4 \cdot {}^4\underline{T}_5 \cdot {}^5\underline{T}_6 = \prod_1^6 {}^{i-1}\underline{T}_i \quad (3.16)$$

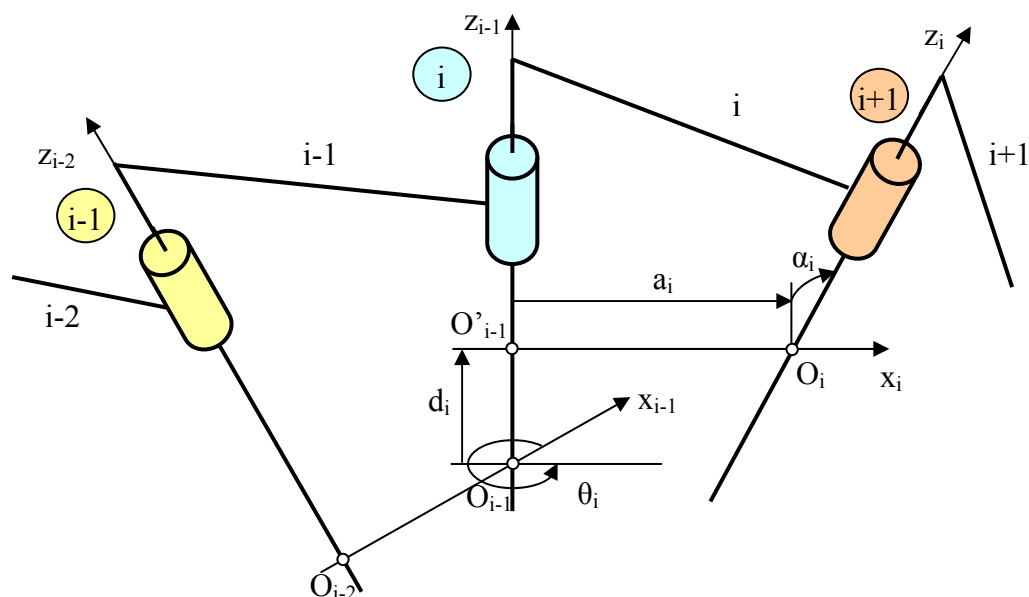
Matricea de situare  ${}^R\underline{T}_{EF} = \begin{bmatrix} \bar{n} & \bar{o} & \bar{a} & \bar{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$

Ecuția matriceală a manipulării  ${}^R\underline{T}_{EF} = {}^0\underline{T}_6 \quad (3.18)$

## 4. MODELUL GEOMETRIC AL SITUĂRII OBIECTULUI MANIPULAT

### 4.1 Modelul geometric direct al situării obiectului manipulat

#### 4.1.1 Modelul Denavit - Hartenberg



**Fig. 4.1** Notățiile utilizate de modelul Denavit - Hartenberg

Metoda Denavit - Hartenberg s-a introdus în 1955. Este cea mai răspândită metoda de modelare geometrică a roboților. Avantajul metodei constă în numărul redus de parametri necesari trecerii de la un sistem de referință la altul ( $6 \rightarrow 4$ ).

Algoritmul este următorul:

- 1) Se notează elementele pornind de la baza robotului (elementul  $0$ ) și terminând cu efectatorul final. Numărul cuplei cinematice este dat elementul cu cifră mai mare din componența ei.
- 2) Axa  $z_{i-1}$  este axa cuplei cinematice „ $i$ ”, care leagă elementul „ $i-1$ ” de elementul „ $i$ ”.
- 3) Axa  $x_{i-1}$  este perpendiculara comună a axelor  $z_{i-1}$  și  $z_{i-2}$  și este orientată de la  $O_{i-2}$  la  $O_{i-1}$ . Originea sistemului de referință se alege în punctul de intersecție al perpendicularei comune cu axele cuplelor cinematice.

Sensul pozitiv fiind de la indicele mai mic la cel cu indice mai mare.

4) Axele Y sunt definite de produsul vectorial  $\bar{Y} = \bar{Z} \times \bar{X}$ .

5) Se construiește un tabel cu parametri:  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$

Trecerea de la sistemul de referință  $O_{i-1}$  la cel cu originea în  $O_i$  se face prin 4 mișcări elementare:

⇒ **o rotație cu unghiul  $\theta_i$  în jurul axei  $z_{i-1}$** , de suprapunere a axei  $x_{i-1}$  pe direcția axei  $x_i$ , sensul pozitiv fiind de la  $x_{i-1}$  la  $x_i$ .

⇒ **o translație cu  $d_i$  de-a lungul axei  $z_{i-1}$**  ce aduce originea  $O_{i-1}$  în  $O'_{i-1}$ , sensul pozitiv de la  $O_{i-1}$  în  $O'_{i-1}$ .

⇒ **o translație cu  $a_i$  de-a lungul axei  $x_i$**  suprapunând originea  $O'_{i-1}$  cu  $O_i$ , sensul pozitiv de la  $O'_{i-1}$  la  $O_i$ .

⇒ **o rotație cu unghiul  $\alpha_i$  în jurul axei  $x_i$** , de suprapunere a axei  $z_{i-1}$  pe axa  $z_i$ , pozitiv în sensul trigonometric.

Matricea de transformare de la elementul „i” la elementul „i-1” este de forma:

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Trans}(x_i, a_i) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \quad (4.1)$$

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2')$$

Deci rezolvarea modelului geometric direct necesită cunoașterea unor dimensiuni (liniare și unghiulare):

- Pentru o cuplă de rotație:  $\mathbf{d}_i, \mathbf{a}_i, \alpha_i$  sunt constante și  $\theta_i = \theta_i(\mathbf{t})$
- Pentru o cuplă de translație:  $\theta_i, \mathbf{a}_i, \alpha_i$  sunt constante și  $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i(\mathbf{t})$
- Tabelul Denavit-Hartenberg

	$\theta_i$	$\mathbf{d}_i$	$\mathbf{a}_i$	$\alpha_i$
<b>0-1</b>	$\theta_1$	$\mathbf{d}_1$	$\mathbf{a}_1$	$\alpha_1$
<b>1-2</b>	$\theta_2$	$\mathbf{d}_2$	$\mathbf{a}_2$	$\alpha_2$
<b>2-3</b>	$\theta_3$	$\mathbf{d}_3$	$\mathbf{a}_3$	$\alpha_3$

Revenind la ecuația matriceală:

$${}^R \underline{T}_{EF} = {}^0 \underline{T}_6 \qquad {}^0 \underline{T}_6 = \prod_1^6 {}^{i-1} \underline{T}_i \qquad (4.3)$$

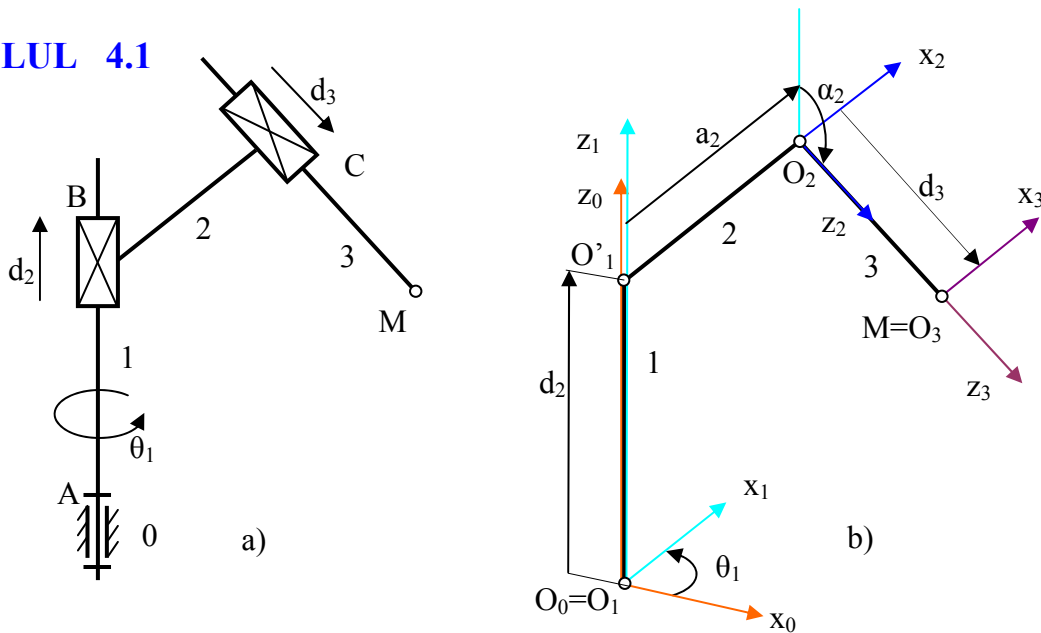
$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{o}_x & \mathbf{a}_x & \mathbf{p}_x \\ \mathbf{n}_y & \mathbf{o}_y & \mathbf{a}_y & \mathbf{p}_y \\ \mathbf{n}_z & \mathbf{o}_z & \mathbf{a}_z & \mathbf{p}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

unde  $f_{ij} = f_{ij}(\theta_i, \mathbf{d}_i, \mathbf{a}_i, \alpha_i)$  (4.5)

Pentru convenția Denavit - Hartenberg, soluția problemei geometrice directe constă în egalarea elementelor matricelor din relația 4.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x &= f_{11} & \mathbf{o}_x &= f_{12} & \mathbf{a}_x &= f_{13} & \mathbf{p}_x &= f_{14} \\ \mathbf{n}_y &= f_{21} & \mathbf{o}_y &= f_{22} & \mathbf{a}_y &= f_{23} & \mathbf{p}_y &= f_{24} \\ \mathbf{n}_z &= f_{31} & \mathbf{o}_z &= f_{32} & \mathbf{a}_z &= f_{33} & \mathbf{p}_z &= f_{34} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

## EXEMPLUL 4.1



**Fig. 4.2 Modelul geometric direct - Structura RTT:**  
**a) schema cinematică b) schema asociată**

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0 - 1	$\theta_1$	0	0	0
1 - 2	0	$d_2$	$a_2$	$+90^0$
2 - 3	0	$d_3$	0	0

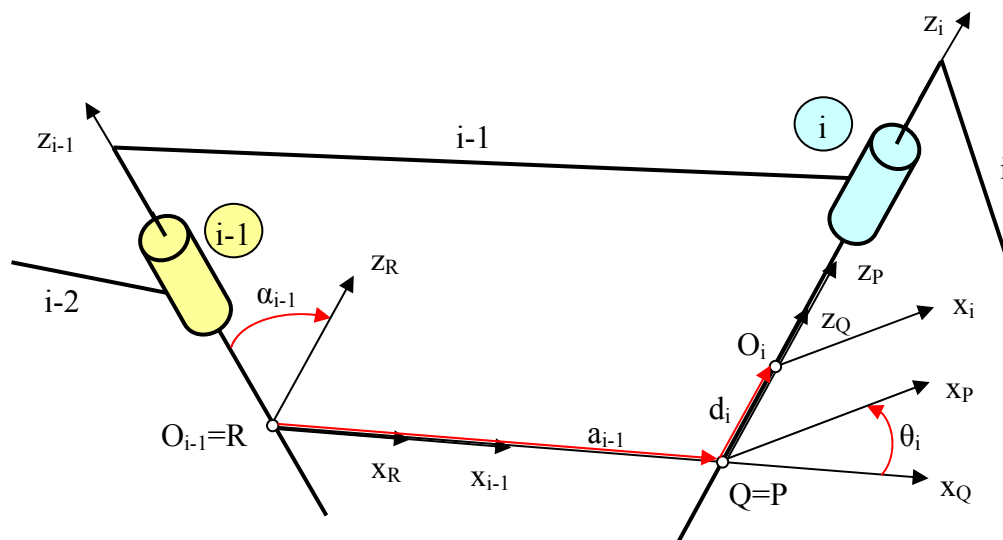
$${}^{i-1}\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2')$$

$${}^0\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\underline{T}_3 = {}^0\underline{T}_1 \cdot {}^1\underline{T}_2 \cdot {}^2\underline{T}_3$$

$${}^0\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & a_2 \cdot \cos \theta_1 + d_3 \cdot \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & a_2 \cdot \sin \theta_1 - d_3 \cdot \cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.1.2 Modelul Craig



**Fig. 4.3** Notățiile utilizate de modelul Craig

Particularitatea modelului Craig constă în **alegerea axei  $z_i$  în axa cuplei cinematice „ $i$ ”**, care leagă elementul „ $i-1$ ” de elementul „ $i$ ”. Transformarea omogenă este o funcție de 4 parametri dintre care **una este variabilă** iar celelalte **trei sunt constante**. De fapt putem afirma că fiecare parametru exprimă o matrice elementară motiv pentru care se mai atașează 3 sisteme de referință intermediare **R, Q și P**. Strategia de trecere de la sistemul legat de elementul „ $i-1$ ” la elementul „ $i$ ” constă în:

- ⇒ Trecerea de la sistemul de referință „ $i-1$ ” la sistemul de referință „**R**”, care are loc printr-o **rotație cu unghiul  $\alpha_{i-1}$  în jurul axei  $x_{i-1}$**  de suprapunere a axei  $z_{i-1}$  pe axa  $z_R$ , pozitiv în sensul trigonometric;
- ⇒ Trecerea de la sistemul de referință „**R**” la sistemul de referință „**Q**” care are loc printr-o **translație cu  $a_{i-1}$  de-a lungul axei  $x_{i-1}$**  suprapunând originea „**R**” cu „**Q**”, sensul pozitiv de la „**R**” la „**Q**”.

⇒ Trecerea de la sistemul de referință „Q” la sistemul de referință „P” care are loc printr-o **rotație cu unghiul  $\theta_i$  în jurul axei  $z_i$**  de suprapunere a axei  $x_Q$  pe axa direcția axei  $x_P$ , pozitiv în sensul trigonometric;

⇒ Trecerea de la sistemul de referință „P” la sistemul de referință „i” care are loc printr-o **translație cu  $d_i$  de-a lungul axei  $z_i$**  ce aduce originea „P” în „O<sub>i</sub>”, sensul pozitiv de la „P” în „O<sub>i</sub>”.

Conform relației de recurență:

$${}^{i-1}\underline{T}_i = {}^{i-1}\underline{T}_R \cdot {}^R\underline{T}_Q \cdot {}^Q\underline{T}_P \cdot {}^P\underline{T}_i \quad (4.7)$$

sau matricea de transformare omogenă de la elementul „i-1” la elementul „i” este:

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \mathbf{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot \mathbf{Trans}(x_{i-1}, a_{i-1}) \cdot \mathbf{Rot}(z_i, \theta_i) \cdot \mathbf{Trans}(z_i, d_i)$$

$$\text{respectiv} \quad {}^{i-1}\underline{T}_i = \mathbf{Elice}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}, a_{i-1}) \cdot \mathbf{Elice}(z_i, \theta_i, d_i) \quad (4.8)$$

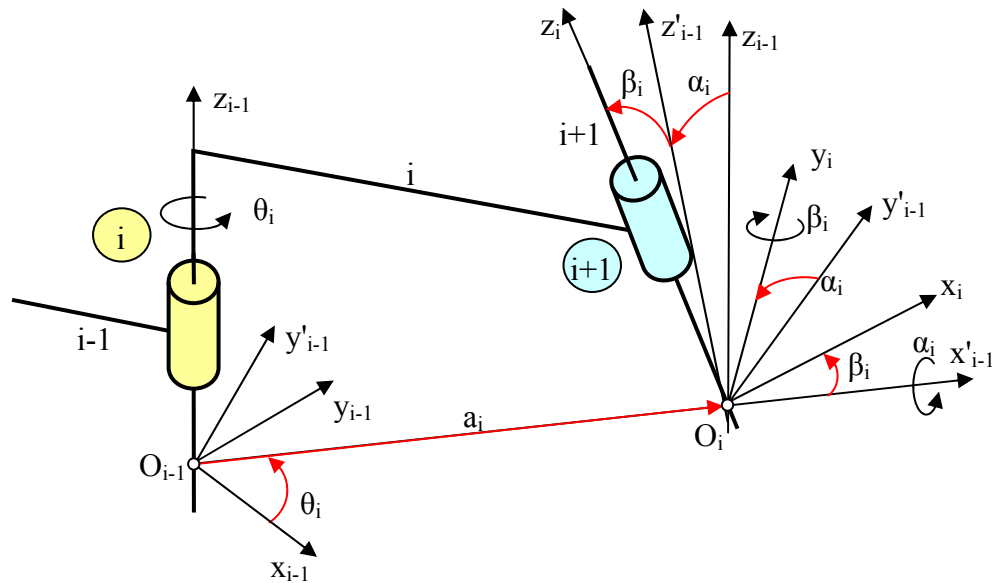
Utilizând matricele elementare se obține:

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cdot \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \cdot \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cdot \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cdot \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Modelul Craig elimină confuzia datorată utilizării indicelui „i” pentru axa „i-1” ca în cazul convenției Denavit – Hartenberg, dar păstrează problema singularității de model datorat cazului axelor paralele. Transformarea omogenă după modelul Craig poate fi privită ca o compunere de două mișcări elicoidale.

### 4.1.3 Modelul Hayati



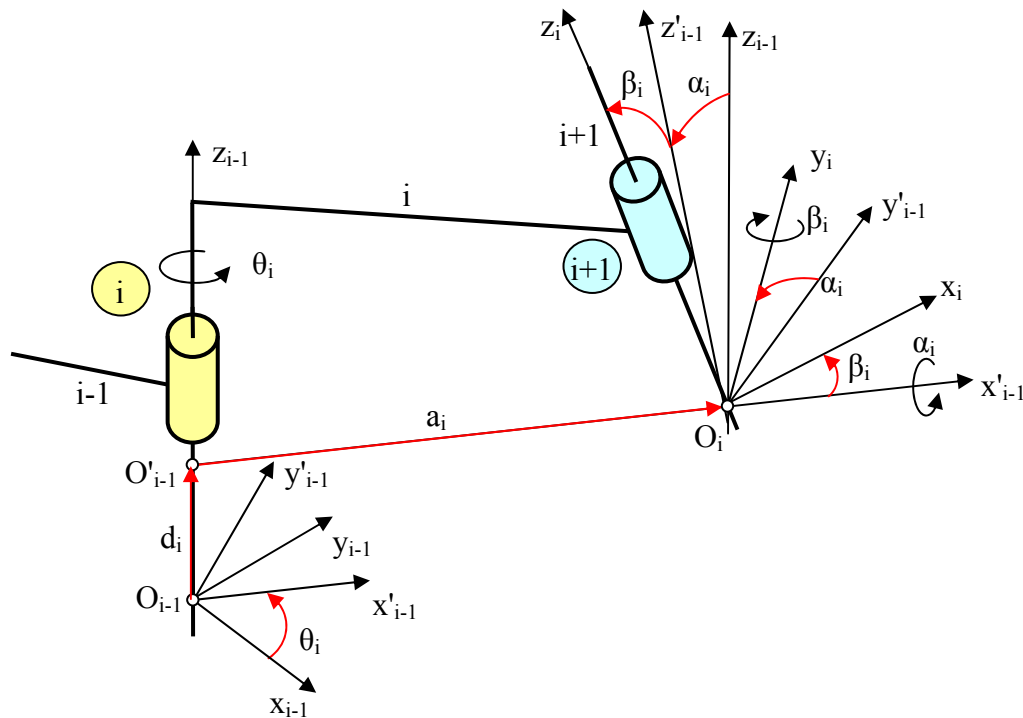
**Fig. 4.4** Notațiile utilizate de modelul Hayati

Pe baza modelului Denavit – Hartenberg, modelul Hayati încearcă eliminarea singularității de model pentru cazul axelor paralele succesive, prin înlocuirea distanței „ $d_i$ ”, dintre originile sistemelor „ $i$ ” și „ $i-1$ ” (modelele Denavit–Hartenberg și Craig), **cu unghiul de aliniere „ $\beta_i$ ”, al axei „ $y_i$ ” cu axa „ $y_{i-1}$ ”**. Utilizând acest model singularitatea de axe paralele este înlocuită cu singularitatea de axe perpendiculare, problemele menținându-se.

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(x_{i-1}, a_i) \cdot \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \cdot \text{Rot}(y_i, \beta_i) \quad (4.11)$$



#### 4.1.4 Modelul Hsu - Everett



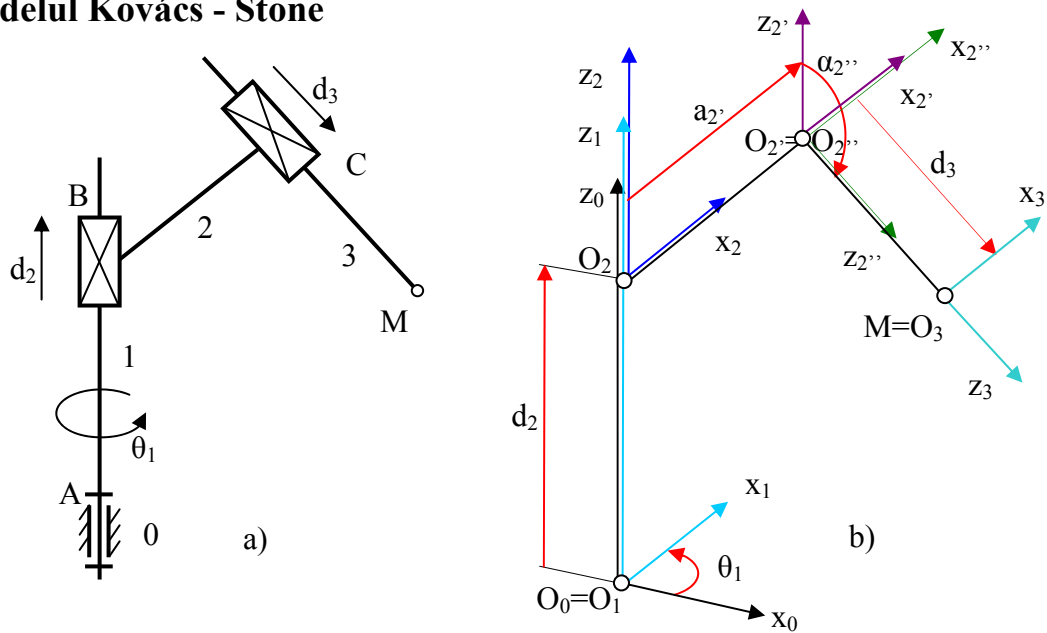
**Fig. 4.5** Notațiile utilizate de modelul Hsu - Everett

Pentru a elimina problemele apărute în urma modificării făcute de Hayati, Hsu și Everett mențin această modificare (**unghiul de aliniere „ $\beta_i$ ”**), dar reintroduc parametrul „ $d_i$ ”,

$${}^{i-1}\underline{T}_i = \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Trans}(x_{i-1}, a_i) \cdot \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \cdot \text{Rot}(y_i, \beta_i) \quad (4.12)$$

**Calibrarea** utilizând acest model, precum și studiul **sensibilității** de model referitor la liniaritatea operatorului au condus la rezultate remarcabile privind insensibilitatea datorată erorilor de execuție și de montaj. Numărul parametrilor variabili rămâne același, fiind vorba doar de unul singur pentru o cuplă cinematică conducătoare. Chiar dacă inițial volumul de calcul este mai mare, simplificările de model pentru studiul dinamicii pot justifica folosirea a 5 parametrii.

### 4.1.5 Modelul Kovács - Stone



**Fig. 4.6** Notățiile utilizate de modelul Kovács pentru o structură de robot RTT  
 a) schema cinematică      b) schema asociată

Modelul Kovács constă în atașarea unui contur poligonal deschis dispozitivului de ghidare, atașându-se câte un sistem de referință fiecărei laturi a conturului și elementelor în mișcare relativă. Convenția este următoarea:

- ⇒ Axele  $z$  se aleg ca axe ale cuplelor cinematice de rotație sau de translație;
- ⇒ Offseturile se aleg ca axe  $x$ ;
- ⇒ Axele  $x$  se aleg paralele între ele.

$${}^0\underline{T}_3 = {}^0\underline{T}_1 \cdot {}^1\underline{T}_2 \cdot {}^2\underline{T}_{2'} \cdot {}^{2'}\underline{T}_{2''} \cdot {}^{2''}\underline{T}_3 \quad (4.13)$$

$${}^0\underline{T}_3 = \text{Rot}(z_0, \theta_1) \cdot \text{Trans}(z_1, d_2) \cdot \text{Trans}(x_2', a_2') \cdot \text{Rot}(x_2'', \alpha_2'') \cdot \text{Trans}(z_2'', d_3) \quad (4.14)$$

$${}^0\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.15)$$

$${}^0\underline{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & d_3 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & -d_3 \cos \theta_1 + a_2 \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Modelul STONE (Arm Signature Model, S – Model) este analog cu cel prezentat anterior, utilizând însă alte notații. Situarea (orientarea + poziționarea) sunt calculate asemănător modelului Denavit – Hartenberg.

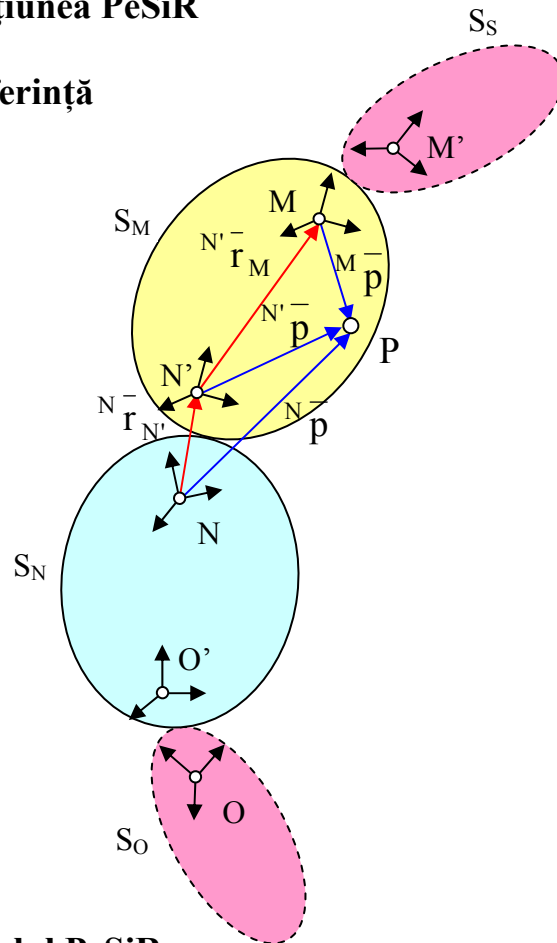
$$\mathbf{S}_n = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{B}_n \quad (4.17)$$

Matricele  $\mathbf{B}_i$  descriu transformările elementare relative dintre sistemele  $S_{i-1}$  și  $S_i$  având ca referință  $S_{i-1}$ , fiind definită prin:

$${}^{i-1}\underline{\mathbf{B}}_i = \text{Rot}(z, \gamma_i) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_i) \cdot \text{Trans}(a_i, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(0, 0, b_i) \quad (4.18)$$

#### 4.1.6 Modelul Kovács utilizând noțiunea PeSiR

**PeSiR = Perechi de Sisteme de Referință**



**Fig. 4.7** Notațiile utilizate de modelul PeSiR

Elementele  $N$  și  $N'$  în contact materializează o cuplă cinematică generalizată.

Sistemele de referință  $N$  și  $N'$  atașate constituie **Perechea de Sisteme de Referință**, PeSiR  $N - N'$ . Situația relativă a două sisteme de referință  $N$  și  $N'$ , se exprimă prin matricea de situare:

$${}^N \underline{S}_{N'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_x & n_x & o_x & a_x \\ r_y & n_y & o_y & a_y \\ r_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Situația relativă a sistemului de referință  $N'$  față de sistemul de referință  $N$  se poate exprima și prin intermediul matricei de trecere de la  $N'$  la  $N$ :

$${}^N \underline{S}_{N'} = {}^N \underline{T}_{N'} \quad (4.20)$$

unde:

$${}^N \underline{T}_{N'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, q_1) \cdot \text{Trans}(\mathbf{y}, q_2) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, q_3) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, q_4) \cdot \text{Rot}(\mathbf{y}, q_5) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, q_6) \quad (4.21)$$

$${}^N \underline{T}_{N'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & c_5 \cdot c_6 & s_4 \cdot s_5 \cdot c_6 - c_4 s_6 & c_4 \cdot s_5 \cdot c_6 + s_4 s_6 \\ q_2 & c_5 \cdot s_6 & s_4 \cdot s_5 \cdot s_6 + c_4 c_6 & c_4 \cdot s_5 \cdot s_6 - s_4 c_6 \\ q_3 & -s_5 & s_4 \cdot c_5 & c_4 \cdot c_5 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\text{unde } s_4 = \sin q_4 \quad c_4 = \cos q_4$$

${}^N \underline{T}_{N'}$  se poate exprima și ca o matrice în formă vectorială (6 x 1) și anume:

$${}^N \underline{T}_{N'}^v = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6\}^T \quad (4.23)$$

Ceea ce conduce la exprimarea situației sistemului  $N'$  în raport cu  $N$  cu expresia:

$${}^N \underline{S}_{N'}^v = {}^N \underline{T}_{N'}^v \quad (4.24)$$

unde matricea de situație  ${}^N \underline{S}_{N'}^v$  are expresia:

$${}^N \underline{S}_{N'}^v = \{r_x \ r_y \ r_z \ o_{rx} \ o_{ry} \ o_{rz}\}^T \quad (4.25)$$

$\Rightarrow {}^N \underline{r}_{N'} = \{r_x \ r_y \ r_z\}^T$  este vectorul de poziție al originii sistemului de referință

$N'$  în raport cu sistemul de referință  $N$ ;

$\Rightarrow {}^N \underline{o}_{N'} = \{o_{rx} \ o_{ry} \ o_{rz}\}^T$  este vectorul de orientare al sistemului de referință

$N'$  în raport cu sistemul de referință  $N$ .

Modelul matricial de ordinul zero al cuplei generalizate este definit de expresia:

$${}^N \underline{T}_{N'}^v = \{q_i\}^T \quad i = \overline{1,6} \quad (4.26)$$

având în componență elemente constante și elemente variabile:

$${}^N \underline{T}_{N'}^v = \left( {}^N \underline{T}_{N'}^v \right)_{ct.} + \left( {}^N \underline{T}_{N'}^v \right)_{var.} \quad (4.27)$$

sau

$$\{q_i\}^T = \{q_i\}_{ct.}^T + \{q_i\}_{var.}^T \quad i = \overline{1,6} \quad (4.28)$$

Modelul cinematic de ordinul 1 al cuplei generalizate are expresia:

$${}^N \dot{\underline{T}}_{N'}^v = \frac{\partial}{\partial t} \left( {}^N \underline{T}_{N'}^v \right) = \left( {}^N \dot{\underline{T}}_{N'}^v \right)_{var.} = \{\dot{q}_i\}_{var.}^T \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( {}^N \underline{T}_{N'}^v \right)_{ct.} = 0 \quad (4.29)$$

Modelul cinematic de ordinul 2 al cuplei generalizate are expresia:

$${}^N \ddot{\underline{T}}_{N'}^v = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( {}^N \underline{T}_{N'}^v \right) = \left( {}^N \ddot{\underline{T}}_{N'}^v \right)_{var.} = \{\ddot{q}_i\}_{var.}^T \quad (4.30)$$

unde:  $q_{i \text{ ct.}}$  este partea constantă  $\frac{\partial \{q_i\}_{ct.}}{\partial t} = 0$

$q_{i \text{ var.}}$  este partea variabilă  $q_{i \text{ var.}} = q_{i \text{ var.}}(t)$

Numărul gradelor de libertate al cuplei generalizate se calculează cu relația:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^6 (q_{var.})_j}{(q_{var.})_j} \quad q_{var.} \neq 0 \quad (4.31)$$

Clasa cuplei generalizate este:  $i = 6 - L$

**Elementul N'M** formează un „offset” generalizat (Fig. 4.7). O pereche de sisteme de referință **N'** și **M** se solidarizează cu acest element. Modelul matematic de ordinul zero al „offset”-ului generalizat are expresia:

$${}^N \underline{T}_M^v = \{q_{c1} \ q_{c2} \ q_{c3} \ q_{c4} \ q_{c5} \ q_{c6}\}^T \quad (4.32)$$

în care elementul **N'M** este nedeformabil (rigid). Întrucât  $\dot{q}_{ci} = \ddot{q}_{ci} = 0$  modelele cinematice de ordinul 1 și 2 al „offset”-ului generalizat nu mai au sens.

Alegând un reper  $\mathbf{P} \in \mathbf{M}$ , vectorul de poziție al punctului  $\mathbf{P}$  (Fig. 4.7), în raport cu sistemul de referință  $\mathbf{N}$  se exprimă prin:

$${}^N \underline{\mathbf{p}} = {}^N \underline{\mathbf{T}}_M \cdot {}^M \underline{\mathbf{p}} = {}^N \underline{\mathbf{T}}_{N'} \cdot {}^{N'} \underline{\mathbf{p}} \quad (4.33)$$

iar în raport cu sistemul de referință  $\mathbf{N}'$  cu relația:

$${}^{N'} \underline{\mathbf{p}} = {}^{N'} \underline{\mathbf{T}}_M \cdot {}^M \underline{\mathbf{p}} \quad (4.34)$$

Din sistemul format de relațiile (4.33) și (4.34):

$$\begin{cases} {}^N \underline{\mathbf{p}} = {}^N \underline{\mathbf{T}}_{N'} \cdot {}^{N'} \underline{\mathbf{T}}_M \cdot {}^M \underline{\mathbf{p}} \\ {}^N \underline{\mathbf{p}} = {}^N \underline{\mathbf{T}}_M \cdot {}^M \underline{\mathbf{p}} \end{cases} \quad (4.35)$$

se obține:

$${}^N \underline{\mathbf{T}}_M = {}^N \underline{\mathbf{T}}_{N'} \cdot {}^{N'} \underline{\mathbf{T}}_M = \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \quad (4.36)$$

Astfel în raport cu un reper exterior, „offset”-ul generalizat are ca expresie a modelelor cinematice de ordinul 1 și 2:

$${}^N \dot{\underline{\mathbf{T}}}_M = {}^N \dot{\underline{\mathbf{T}}}_{N'} \cdot {}^{N'} \underline{\mathbf{T}}_M \quad {}^{N'} \dot{\underline{\mathbf{T}}}_M = 0 \quad (4.37)$$

respectiv:

$${}^N \ddot{\underline{\mathbf{T}}}_M = {}^N \ddot{\underline{\mathbf{T}}}_{N'} \cdot {}^{N'} \underline{\mathbf{T}}_M \quad (4.38)$$

Considerând lanțul cinematic deschis (Fig. 4.8 a) format din două elemente  $\mathbf{N}$  și  $\mathbf{M}$  legate printr-o cuplă cinematică  $\mathbf{N}\mathbf{N}'$  și având un „offset”  $\mathbf{N}'\mathbf{M}$ , expresia matricei de situare a elementului  $\mathbf{M}$  în raport cu elementul  $\mathbf{N}$  este:

$${}^N \underline{\mathbf{S}}_M = {}^N \underline{\mathbf{T}}_M = \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \quad (4.39)$$

respectiv pentru un reper exterior:

$${}^N\bar{\mathbf{p}} = \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \cdot {}^M\bar{\mathbf{p}} \quad (4.40)$$

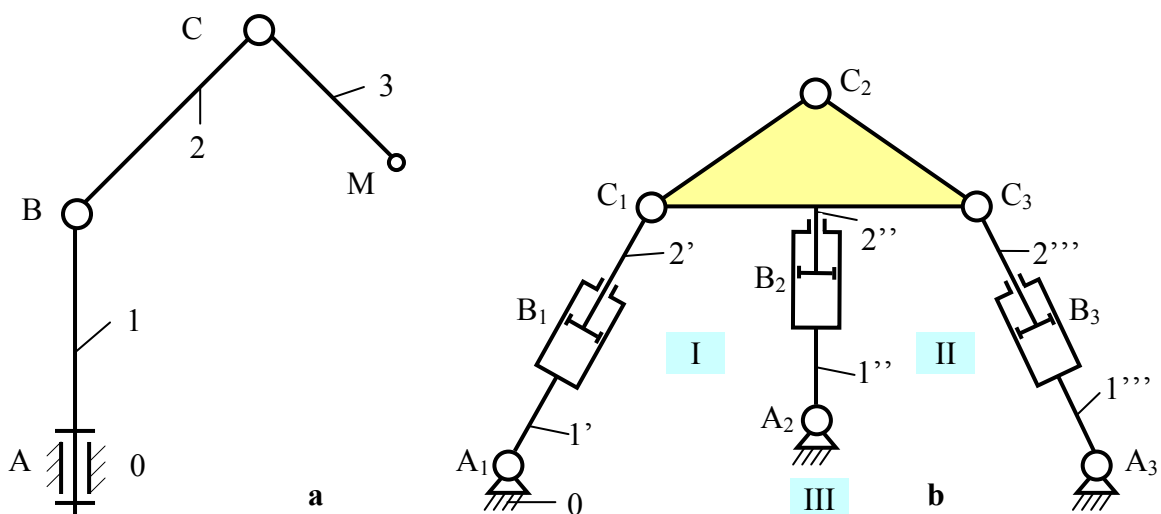
Viteza și accelerația de schimbare a situației elementului  $\mathbf{M}$  în raport cu elementul  $\mathbf{N}$  este dată de expresia:

$${}^N\dot{\underline{\mathbf{S}}}_M = \frac{\partial}{\partial t} \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \quad {}^N\ddot{\underline{\mathbf{S}}}_M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \quad (4.41)$$

respectiv pentru un reper exterior:

$${}^N\bar{\mathbf{p}}' = \frac{\partial}{\partial t} \left( \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \right) \cdot {}^M\bar{\mathbf{p}} \quad {}^N\bar{\mathbf{p}}'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \prod_M^N \underline{\mathbf{T}} \right) \cdot {}^M\bar{\mathbf{p}} \quad (4.42)$$

deoarece pentru  $\mathbf{P} \in \mathbf{M}$  rezultă:  ${}^M\bar{\mathbf{p}}' = {}^M\bar{\mathbf{p}}'' = 0$



**Fig. 4.8 Mecanism generator de traiectorie: a) robot serial; b) robot paralel**

Contururile închise ale mecanismului (Fig. 4.8 b) se formează astfel încât fiecare conexiune care leagă elementul „m” de elementul „0” să se includă în maximum două contururi închise.

Conturul I:  $0 - A_1 - B_1 - C_1 - C_2 - B_2 - A_2 - 0$

Conturul II:  $0 - A_2 - B_2 - C_2 - C_3 - B_3 - A_3 - 0$

Conturul III:  $0 - A_1 - B_1 - C_1 - C_3 - B_3 - A_3 - 0$



$${}^0\underline{S}_m = \left( \prod_m^0 \underline{T} \right)_1 = \left( \prod_m^0 \underline{T} \right)_2 = \left( \prod_m^0 \underline{T} \right)_3 = \dots \quad (4.43)$$

$${}^{N_1'} \underline{T}_{N_3'} = {}^{N_1'} \underline{T}_{N_2'} = {}^{N_2'} \underline{T}_{N_3'}, \quad (4.44)$$

unde  $\prod_m^0 \underline{T}$  corespunde conexiunii NN', iar numărul de egalități matriceale din

$$\text{sistemul 4.44 este de :} \quad l = \sum (\text{ord}_\varepsilon - 2) \quad (4.45)$$

unde s-a notat cu  $\text{ord}_\varepsilon$ , ordinul elementului  $\varepsilon$ , dacă  $\text{ord}_\varepsilon \geq 3$

#### 4.1.7 Modelul geometric invers Denavit – Hartenberg

Pornind de la ecuația matriceală prezentată în relația 4.3

$${}^R \underline{T}_{EF} = {}^0 \underline{T}_6 = \prod_1^6 {}^{i-1} \underline{T}_i$$

Pe baza matricei coordonatelor generalizate:

$$\bar{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6\}^T \quad (4.46)$$

și înmulțind la stânga se separă succesiv variabilele „ $q_i$ ”:

$$\begin{aligned} {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^1 \underline{T}_2 \cdot {}^2 \underline{T}_3 \cdot {}^3 \underline{T}_4 \cdot {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 = {}^1 \underline{T}_6 \\ {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^2 \underline{T}_3 \cdot {}^3 \underline{T}_4 \cdot {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 = {}^2 \underline{T}_6 \\ {}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^3 \underline{T}_4 \cdot {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 = {}^3 \underline{T}_6 \\ {}^3 \underline{T}_4^{-1} \cdot {}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 = {}^4 \underline{T}_6 \\ {}^4 \underline{T}_5^{-1} \cdot {}^3 \underline{T}_4^{-1} \cdot {}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^5 \underline{T}_6 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Produsele matriceale conduc la următoarea egalitate:

$$\begin{bmatrix} f_1(n) & f_1(o) & f_1(a) & f_1(p) \\ f_2(n) & f_2(o) & f_2(a) & f_2(p) \\ f_3(n) & f_3(o) & f_3(a) & f_3(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

respectiv următoarele relații între elementele matricelor:

$$\begin{cases} f_1(n) = h_{11} & f_1(o) = h_{12} & f_1(a) = h_{13} & f_1(p) = h_{14} \\ f_2(n) = h_{21} & f_2(o) = h_{22} & f_2(a) = h_{23} & f_2(p) = h_{24} \\ f_3(n) = h_{31} & f_3(o) = h_{32} & f_3(a) = h_{33} & f_3(p) = h_{34} \end{cases} \quad (4.49)$$

Dintre aceste relații se selectează relația care este dependentă numai de variabila „ $q_i$ ” unde  $i=1\dots 6$ . Soluționând pe rând relațiile 4.47 se obțin variabilele „ $q_i$ ”.

## EXEMPLUL 4.2

Aferent structurii robotului prezentat în [Exemplul 4.1](#). Pornind de la expresia matricii de transformare omogenă aferentă mecanismului generator de traiectorie de structura

**RzTzTx:**

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & a_2 \cdot \cos \theta_1 + d_3 \cdot \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & a_2 \cdot \sin \theta_1 - d_3 \cdot \cos \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_x = a_2 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1 \\ p_y = a_2 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1 \\ p_z = d_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

Prima soluție este  $d_2 = p_z$ .

Primele două ecuații ale sistemului 4.50 conduc la obținerea lui  $d_3$ .

$$\begin{cases} p_x^2 = (a_2 \cos \theta_1 + d_3 \sin \theta_1)^2 \\ p_y^2 = (a_2 \sin \theta_1 - d_3 \cos \theta_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x^2 = a_2^2 \cos^2 \theta_1 + 2 a_2 d_3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + d_3^2 \cos^2 \theta_1 \\ p_y^2 = a_2^2 \sin^2 \theta_1 - 2 a_2 d_3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + d_3^2 \sin^2 \theta_1 \end{cases} \quad (4.51)$$

$$d_3^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + a_2^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) = p_x^2 + p_y^2$$

$$d_3^2 + a_2^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad \text{pt. } a_2 = \text{const.}$$

A doua soluție este  $d_3 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - a_2^2}$

Din prima relație a sistemului 4.50 și anume

$$d_3 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1 = p_x$$

se admite o soluție de forma:

$$A \sin \theta_1 + B \cos \theta_1 = D \quad (4.52)$$

Utilizând substituția (conform Fig. 4.9):

$$A = r \cos \varphi \quad \text{și} \quad B = r \sin \varphi \quad \text{unde} \quad \varphi = \text{arctg} \frac{B}{A} \quad \text{iar} \quad r = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (4.53)$$

$$r \cos \varphi \sin \theta_1 + r \sin \varphi \cos \theta_1 = D$$

$$\cos \varphi \sin \theta_1 + \sin \varphi \cos \theta_1 = \frac{D}{r}$$

$$\sin(\varphi + \theta_1) = \frac{D}{r}$$

$$\cos(\varphi + \theta_1) = \sqrt{1 - \frac{D^2}{r^2}}$$

$$\text{tg}(\varphi + \theta_1) = \frac{\sin(\varphi + \theta_1)}{\cos(\varphi + \theta_1)} = \frac{\frac{D}{r}}{\pm \sqrt{1 - \frac{D^2}{r^2}}} = \frac{D}{\pm \sqrt{r^2 - D^2}}$$

$$\varphi + \theta_1 = \text{arctg} \frac{D}{\pm \sqrt{r^2 - D^2}} = \text{arctg} \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}} \quad (4.54)$$

$$\theta_1 = \text{arctg} \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}} - \text{arctg} \frac{B}{A}$$

Pentru  $A = d_3$   $B = a_2$  și  $D = p_x$  se obține a treia soluție  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = \text{arctg} \frac{\pm p_x}{\sqrt{d_3^2 + a_2^2 - p_x^2}} - \text{arctg} \frac{a_2}{d_3}$$

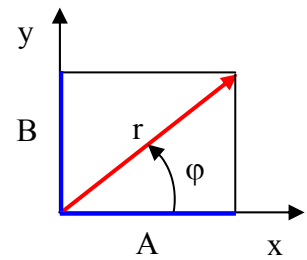


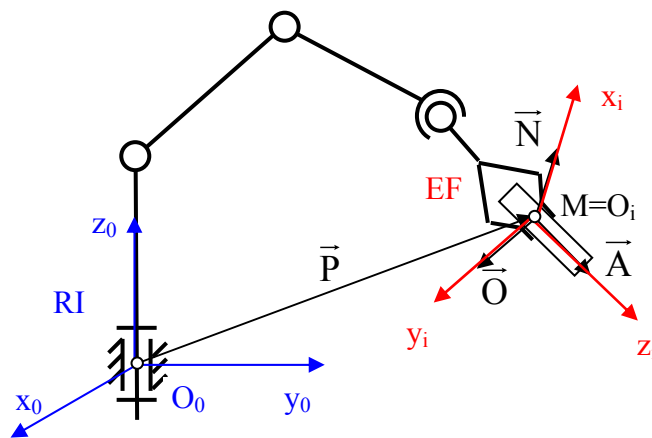
Fig. 4.9

## 5 MODELUL CINEMATIC DIRECT ȘI INVERS AL ROBOTULUI

In cazul rezolvării problemei cinematice directe a vitezelor se cunosc lungimile elementelor și vitezele lor relative și se calculează viteza rezultantă a punctului caracteristic **M**.

In cazul rezolvării problemei cinematice inverse a vitezelor se cunosc lungimile elementelor și viteza rezultantă a punctului caracteristic **M** (Fig. 5.1) și se calculează vitezele relative ale cuplelor conducătoare.

### 5.1 Modelul cinematic direct al robotului



**Fig. 5.1 Model de calcul pentru analiza cinematică directă a vitezelor**

Se consideră un sistem de referință fix atașat bazei robotului - RI cu originea în punctul  $O_0$  și un sistem de referință mobil atașat efectorului final – EF sau obiectului manipulat cu originea în punctul caracteristic  $M = O_i$ . Starea de viteză a EF se definește prin matricea:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{\Phi}} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

unde:  $\dot{\mathbf{P}} = \{\dot{P}_x \quad \dot{P}_y \quad \dot{P}_z\}^T$  este vectorul viteză liniară al originii  $O_i$ ;

$\dot{\mathbf{\Phi}} = \{\dot{\Phi}_x \quad \dot{\Phi}_y \quad \dot{\Phi}_z\}^T$  este vectorul viteză unghiulară rezultant al EF;

Se definește matricea vitezelor generalizate:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \{\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6\}^T \quad (5.2)$$

unde:  $\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial t}(\theta_i)$  pentru o cuplă conducătoare de rotație;

$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial t}(d_i)$  pentru o cuplă de translație;

Legătura dintre cele două relații  $\dot{\mathbf{X}}$  și  $\dot{\mathbf{Q}}$  este dată de matricea Jacobiană:

$$\dot{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (5.3)$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\Phi}_x \\ \dot{\Phi}_y \\ \dot{\Phi}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Soluția problemei constă în determinarea elementelor matricei Jacobiene.

Explicitând prima linie:

$$\dot{P}_x = J_{11}\dot{q}_1 + J_{12}\dot{q}_2 + J_{13}\dot{q}_3 + J_{14}\dot{q}_4 + J_{15}\dot{q}_5 + J_{16}\dot{q}_6 \quad (5.5)$$

pentru: 
$$\dot{P}_x = \frac{\partial P_x}{\partial t} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad (5.6)$$

se obține 
$$\frac{\partial P_x}{\partial q_1} = J_{11}\frac{\partial q_1}{\partial q_1} + J_{12}\frac{\partial q_2}{\partial q_1} + J_{13}\frac{\partial q_3}{\partial q_1} + J_{14}\frac{\partial q_4}{\partial q_1} + J_{15}\frac{\partial q_5}{\partial q_1} + J_{16}\frac{\partial q_6}{\partial q_1} \quad (5.7)$$

respectiv:

$$J_{11} = \frac{\partial P_x}{\partial q_1} - J_{12} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - J_{13} \frac{\partial q_3}{\partial q_1} - J_{14} \frac{\partial q_4}{\partial q_1} - J_{15} \frac{\partial q_5}{\partial q_1} - J_{16} \frac{\partial q_6}{\partial q_1} \quad (5.8)$$

și având în vedere că în fiecare cuplă conducătoare parametrii cinematici sunt independenți între ei, adică:

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{\partial q_3}{\partial q_1} = \frac{\partial q_4}{\partial q_1} = \frac{\partial q_5}{\partial q_1} = \frac{\partial q_6}{\partial q_1} = 0 \quad J_{11} = \frac{\partial P_x}{\partial q_1} \quad (5.9)$$

În mod similar se deduc și celelalte elemente ale matricei Jacobiene, soluționând linie cu linie relația 5.4. Sistemul de 36 de relații rezultat este de forma:

$$J_{1i} = \frac{\partial P_x}{\partial q_i} \quad J_{2i} = \frac{\partial P_y}{\partial q_i} \quad J_{3i} = \frac{\partial P_z}{\partial q_i} \quad J_{4i} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial q_i} \quad J_{5i} = \frac{\partial \Phi_y}{\partial q_i} \quad J_{6i} = \frac{\partial \Phi_z}{\partial q_i} \quad (5.10)$$

## 5.2 Modelul cinematic invers al robotului

Cunoscând starea de viteză a EF prin matricea  $\dot{\vec{X}}$ , se determină starea de viteză a cuplelor conducătoare cu relația:

$$\dot{\vec{Q}} = \underline{J}^{-1} \cdot \dot{\vec{X}} \quad (5.11)$$

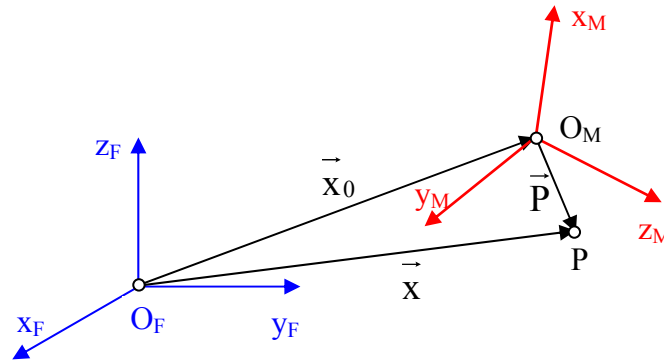
Din expresiile elementelor matricei Jacobiene, se constată că elementele primei coloane depind numai de  $q_1$ , elementele celei de-a doua coloane depind numai de  $q_2$ , ș.a.m.d., adică:

$$J_{11} = f(q_1) \quad J_{12} = f(q_2) \quad \dots \quad J_{16} = f(q_6) \quad (5.12)$$

Astfel primele trei linii ale matricei Jacobiene se obțin cu ajutorul submatricei de translație, iar următoarele trei linii cu ajutorul submatricei de rotație din cadrul matricei de transformare omogenă.

## 5.3 Metoda P. G. Ránky de determinare a elementelor matricei Jacobiene

Considerând un punct „P”, definit de vectorul de poziție  $\vec{P}$ , față de un sistem de referință mobil cu originea  $O_M$ , poziționat în raport cu un sistem de referință fix cu originea în  $O_F$ , prin vectorul  $\vec{X}_0$ .



**Fig. 5.2 Model de calcul pentru viteza punctului P**

Ecuția vectorială a punctului P în sistemul de referință fix:

$${}^F \vec{X} = {}^F \vec{X}_0 + {}^F \vec{P} \quad (5.13)$$

derivată în raport cu timpul:

$${}^F \vec{V} = {}^F \vec{V}_0 + {}^F \vec{P}' \quad (5.14)$$

Considerând submatricea de orientare definită prin relația

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Vectorul de poziție al punctului P în raport cu sistemul de referință fix se exprimă prin relația:

$${}^F \vec{P} = {}^F \underline{R}_M \cdot {}^M \vec{P} \quad (5.16)$$

sau derivata ei:

$${}^F \vec{P}' = {}^F \underline{R}'_M \cdot {}^M \vec{P} + {}^F \underline{R}_M \cdot {}^M \vec{P}' \quad (5.17)$$

Întrucât matricea  $\underline{R}$  este ortonormală, având proprietatea:

$$\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T \quad \underline{R}^{-1} \cdot \underline{R} = \underline{I}$$

și cum:

$${}^M \vec{P} = \text{constanță} \Rightarrow {}^M \vec{P}' = 0 \quad (5.18)$$

se obține:

$${}^F\vec{P}' = {}^F(\underline{R}' \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{R})^M \vec{P} = {}^F(\underline{R}' \cdot \underline{R}^T) {}^F \underline{R} \cdot {}^M \vec{P} = {}^F \underline{\Omega} \cdot {}^F \underline{R} \cdot {}^M \vec{P} \quad (5.19)$$

Derivând relația 5.15 se obține:

$$\underline{R}' = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \cos \alpha & \cos \theta \sin \alpha \\ \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Transpusa matricei din relația 5.15 este:

$$\underline{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \alpha & \cos \theta \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \theta \sin \alpha & -\cos \theta \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

iar produsul matriceal:

$$\underline{R}' \cdot \underline{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta} = \underline{\Omega} \quad (5.22)$$

Revenind la relația 5.14:

$${}^F\vec{V} = {}^F\vec{V}_0 + {}^F \underline{\Omega} \cdot {}^F \underline{R} \cdot {}^M \vec{P} \quad (5.23)$$

Submatricea de translație are expresia:

$${}^F \vec{X}_0 = \begin{Bmatrix} a \cdot \cos \theta \\ a \cdot \sin \theta \\ d \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

care prin derivare:

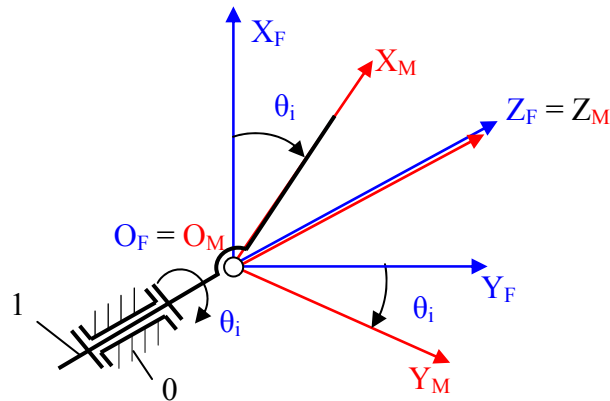
$${}^F \vec{V}_0 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cdot a \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} \cdot a \cdot \cos \theta \\ \dot{d} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$



Relația finală a vitezei liniare este

$${}^F\vec{V} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \cdot a \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} \cdot a \cdot \cos \theta \\ \dot{d} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot {}^M\vec{P} \quad (5.26)$$

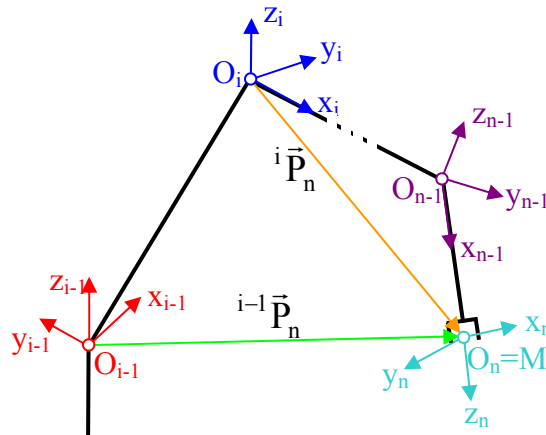
#### 5.4 Cinematica unei cuple conducătoare de rotație



**Fig. 5.3** Schema unei cuple conducătoare de rotație

Pentru cupla conducătoare de rotație conform Fig. 5.3 viteza liniară a originii  ${}^F\vec{V}_0$ ,

deci din relația 5.23 se obține:  ${}^F\vec{V} = {}^F\underline{\Omega} \cdot {}^F\underline{R} \cdot {}^M\vec{P}$  (5.27)



**Fig. 5.4** Calculul vectorilor de poziție al punctului P

Pentru două elemente succesive „i-1” și „i” legate între ele printr-o cuplă

conducătoare de rotație  ${}^{i-1}C_i$  relația 5.27 devine:

$${}^{i-1}\vec{V}_i = {}^{i-1}\underline{\Omega}_i \cdot {}^{i-1}\underline{R}_i \cdot {}^i\vec{P}_n \quad (5.28)$$

Considerând vectorul  ${}^i\vec{P}_n$  ca unind punctul caracteristic M, aparținând efectorului final cu originea  $O_i$ , vectorul  ${}^{i-1}\vec{P}_n$  se obține din relația:

$${}^{i-1}\vec{P}_n = {}^{i-1}\underline{R}_i \cdot {}^i\vec{P}_n \quad (5.29)$$

Expresie utilizată în relația 5.28 conduce la:

$${}^{i-1}\vec{V}_i = {}^{i-1}\underline{\Omega}_i \cdot {}^{i-1}\vec{P}_n \quad (5.30)$$

sau:

$${}^{i-1}\vec{V}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \cdot \dot{\theta}_i \cdot \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} -P_y \\ P_x \\ 0 \end{Bmatrix}_n \cdot \dot{\theta}_i \quad (5.31)$$

Pentru a exprima viteza elementului „i” în sistemul de referință fix este necesar să apelăm la submatriacea de rotație  $\underline{R}$  a matricei de transformare omogenă  ${}^0\underline{T}_{i-1}$  și anume  ${}^0\underline{R}_{i-1}$  și obținem:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{V}_i &= {}^0\underline{R}_{i-1} \cdot \begin{Bmatrix} -P_y \\ P_x \\ 0 \end{Bmatrix}_n \cdot \dot{\theta}_i = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}_{i-1} \cdot \begin{Bmatrix} -P_y \\ P_x \\ 0 \end{Bmatrix}_n \cdot \dot{\theta}_i = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix}_{i-1} \\ -\begin{Bmatrix} P_y \\ P_x \\ 0 \end{Bmatrix}_n \\ {}^0\begin{Bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{Bmatrix}_{i-1} \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (5.32)$$

Mișcarea de rotație finită în jurul axei  $z_i$ :

$${}^{i-1}\vec{\Phi}_i = {}^0\vec{i}_i + {}^0\vec{j}_i + \theta\vec{k}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \theta_i \quad (5.33)$$

iar derivata:

$${}^{i-1}\dot{\vec{\Phi}}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (5.34)$$

În mod similar pentru a exprima viteza unghiulară a elementului „i” în sistemul de referință fix, apelăm la submatricea de rotație  ${}^0 \underline{R}_{i-1}$ :

$${}^0 \dot{\Phi}_i = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \dot{\Phi}_i = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \dot{\Phi}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{\theta}_i = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}_{i-1} \dot{\theta}_i \quad (5.35)$$

Grupând viteza liniară și viteza unghiulară relativă și absolută conform relației 5.1:

$${}^{i-1} \dot{\tilde{X}}_i = \begin{Bmatrix} \vec{V} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_i \quad {}^{i-1} \dot{\tilde{X}}_i = \begin{Bmatrix} -P_y \\ P_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_n \cdot \dot{\theta}_i \quad (5.36a)$$

$${}^0 \dot{\tilde{X}}_i = \begin{Bmatrix} \vec{V} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_i \quad {}^0 \dot{\tilde{X}}_i = \begin{Bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\Phi}_x \\ \dot{\Phi}_y \\ \dot{\Phi}_z \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix}_{i-1} \\ \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{i-1} (P_y)_n \\ {}^{i-1} (P_x)_n \end{Bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (5.36b)$$

## 5.5 Cinematica unei cuple conducătoare de translație

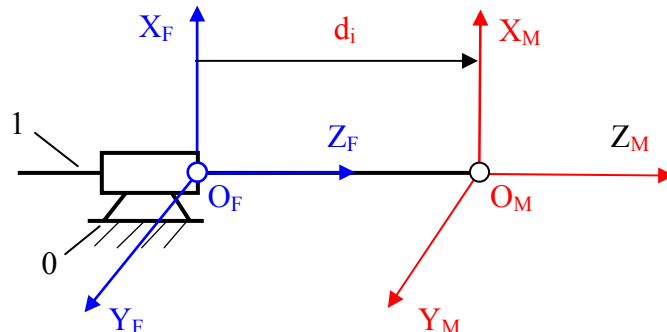


Fig. 5.5 Schema unei cuple conducătoare de translație

Se caracterizează prin lipsa mișcării de rotație:  $\theta = \text{constan t} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$  deci

rămâne numai componenta specifică translației:  ${}^F \vec{V} = {}^F \vec{V}_0$  **(5.37)**

Considerând sistemele fix și mobil ca fiind două sisteme succesive atașate elementelor „i-1” și „i” legate între ele printr-o cuplă de translație  ${}^{i-1}C_i$ :

$${}^{i-1} \vec{V}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_i \end{Bmatrix}_{i-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (5.38)$$

Pentru a exprima viteza elementului „i” în sistemului de referință fix se apelează la submatricea de orientare  ${}^0 \underline{R}_{i-1}$  a matricei de transformare omogenă  ${}^0 \underline{T}_{i-1}$ :

$${}^0 \vec{V}_i = {}^0 \underline{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1} \vec{V}_i = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}_{i-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{i-1} \cdot \dot{d}_i = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (5.39)$$

Ținând cont că vectorul viteză unghiulară relativă  ${}^{i-1} \dot{\Phi}_i = 0$  și absolută  ${}^0 \dot{\Phi}_i = 0$ ,

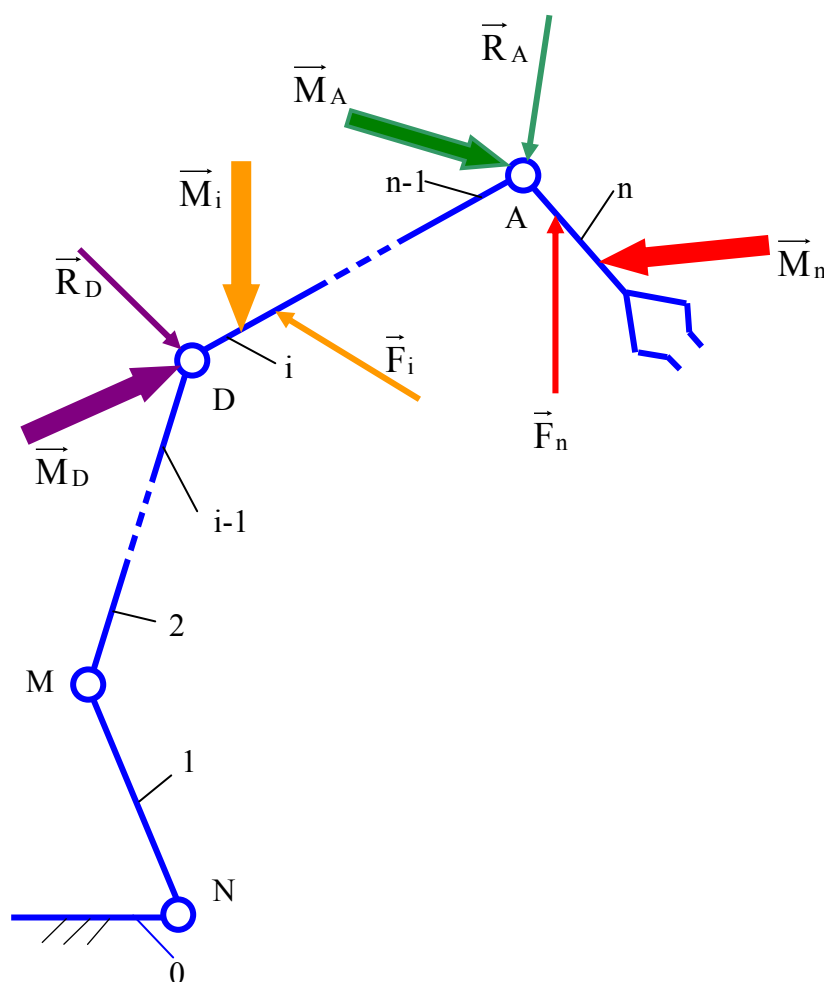
alături de viteza liniară relativă și absolută se obține:

$${}^{i-1} \dot{\vec{X}}_i = \begin{Bmatrix} \vec{V} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_i \quad {}^{i-1} \dot{\vec{X}}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (5.40a)$$

$${}^0 \dot{\vec{X}}_i = \begin{Bmatrix} \vec{V} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}_i \quad {}^0 \dot{\vec{X}}_i = \begin{Bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z \\ \dot{\Phi}_x \\ \dot{\Phi}_y \\ \dot{\Phi}_z \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (5.40b)$$

## 6. MODELUL CINETOSTATIC AL DISPOZITIVULUI DE GHIDARE AL ROBOȚILOR

Se consideră dispozitivul de ghidare al unui robot industrial având la bază lanțul cinematic deschis prezentat în Fig. 6.1. Pentru determinarea reacțiunilor dinamice în cuplele cinematice și a forțelor / momentelor de echilibrare în cuplele cinematice conducătoare se impune să cunoaștem mișcarea mecanismului și rezultanta forțelor / momentelor exterioare (gravitaționale, de frecare și tehnologice)  $\vec{F}_n$  și  $\vec{M}_n$  ce acționează asupra elementului „n”.



**Fig. 6.1** Schema de calcul cinetostatic al dispozitivului de ghidare al roboților

Se va determina tursorul reacțiunilor dinamice  $\vec{R}_A$  și  $\vec{M}_A$  din cupla cinematică de rotație A pentru a atinge starea de mișcare dorită. Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{R}}_A + \vec{\mathbf{F}}_n = 0 \\ \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{M}}_n = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Admițând că, cupla cinematică  $\mathbf{D}$  este o cuplă de translație, al cărui torsesor al forțelor exterioare include forțele/momentele  $\vec{\mathbf{F}}_i$  și  $\vec{\mathbf{M}}_i$  de echilibrare ale cuplei cinematice analizate anterior, atunci ecuația de echilibru este:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{R}}_D + \vec{\mathbf{F}}_i = 0 \\ \vec{\mathbf{M}}_D + \vec{\mathbf{M}}_i = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Torsesorul forțelor generalizate din cupla cinematică de rotație  $\mathbf{A}$  este:

$$\vec{\mathfrak{R}}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{R}}_A \\ \vec{\mathbf{M}}_A \end{Bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{R}}_A = \{R_{Ax} \quad R_{Ay} \quad R_{Az}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{\mathbf{M}}_A = \{M_{Ax} \quad M_{Ay} \quad M_{Az}\}_{3 \times 1}^T \end{cases} \quad (6.3)$$

iar torsesorul forțelor generalizate exterioare:

$$\vec{\mathfrak{S}} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{F}}_n \\ \vec{\mathbf{M}}_n \end{Bmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{F}}_n = \{F_{nx} \quad F_{ny} \quad F_{nz}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{\mathbf{M}}_n = \{M_{nx} \quad M_{ny} \quad M_{nz}\}_{3 \times 1}^T \end{cases} \quad (6.4)$$

Utilizând matricea Jacobiană:

$$\vec{\mathfrak{R}}_A = \underline{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathfrak{S}} \quad (6.5)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \\ M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \\ M_{nx} \\ M_{ny} \\ M_{nz} \end{Bmatrix}$$

Explicitând prima linie:

$$R_{Ax} = J_{11} \cdot F_{nx} + J_{12} \cdot F_{ny} + J_{13} \cdot F_{nz} + J_{14} \cdot M_{nx} + J_{15} \cdot M_{ny} + J_{16} \cdot M_{nz} \quad (6.6)$$

Se determină elementele matricei Jacobiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{11} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial F_{nx}} \quad J_{12} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial F_{ny}} \quad J_{13} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial F_{nz}} \quad J_{14} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial M_{nx}} \quad J_{15} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial M_{ny}} \quad J_{16} = \frac{\partial R_{Ax}}{\partial M_{nz}} \\ J_{21} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial F_{nx}} \quad J_{22} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial F_{ny}} \quad J_{23} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial F_{nz}} \quad J_{24} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial M_{nx}} \quad J_{25} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial M_{ny}} \quad J_{26} = \frac{\partial R_{Ay}}{\partial M_{nz}} \\ J_{31} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial F_{nx}} \quad J_{32} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial F_{ny}} \quad J_{33} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial F_{nz}} \quad J_{34} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial M_{nx}} \quad J_{35} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial M_{ny}} \quad J_{36} = \frac{\partial R_{Az}}{\partial M_{nz}} \\ J_{41} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{nx}} \quad J_{42} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{ny}} \quad J_{43} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{nz}} \quad J_{44} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{nx}} \quad J_{45} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{ny}} \quad J_{46} = \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{nz}} \\ J_{51} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{nx}} \quad J_{52} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{ny}} \quad J_{53} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{nz}} \quad J_{54} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{nx}} \quad J_{55} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{ny}} \quad J_{56} = \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{nz}} \\ J_{61} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{nx}} \quad J_{62} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{ny}} \quad J_{63} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{nz}} \quad J_{64} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{nx}} \quad J_{65} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{ny}} \quad J_{66} = \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{nz}} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

### 6.1 Cinetostatica unei cuple conducătoare de rotație

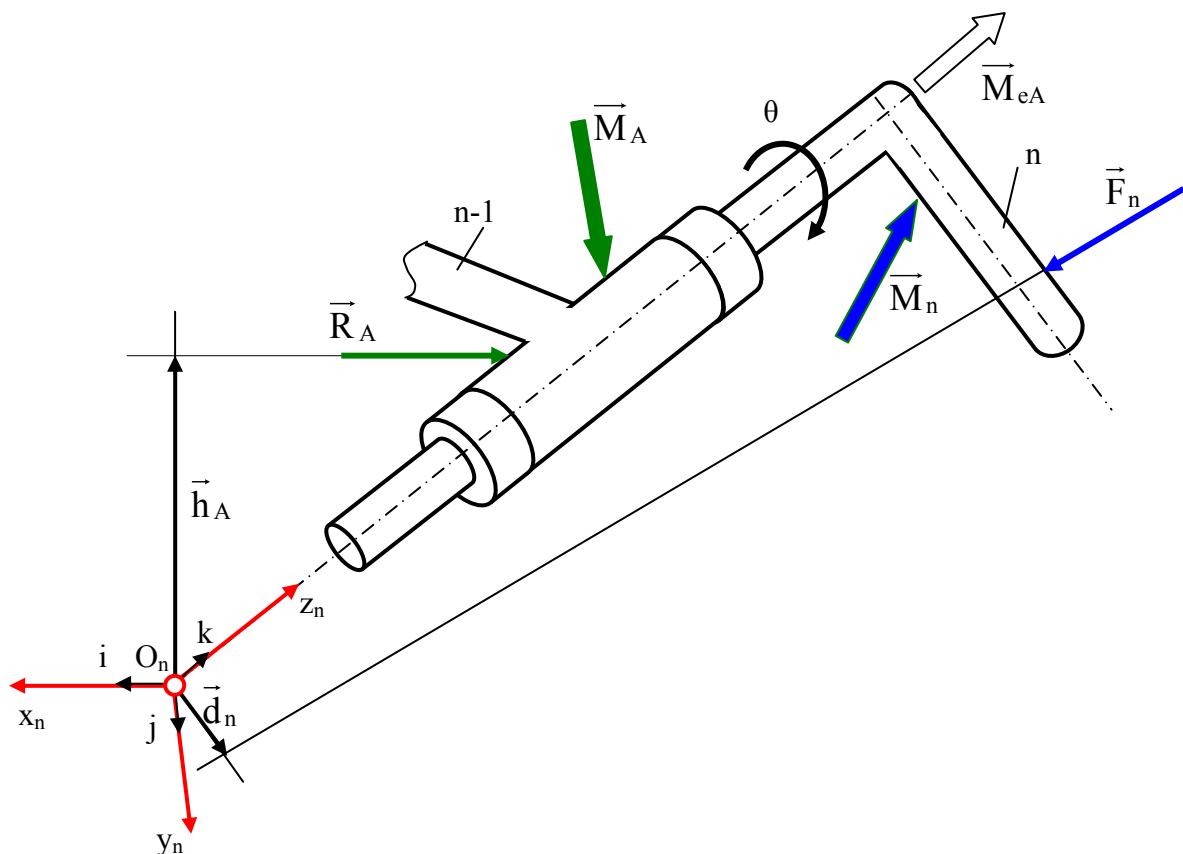


Fig. 6.2 Model de calcul al unei cuple conducătoare de rotație

Ecuatia de echilibru în cupla cinematică **A** este:

$$\begin{cases} \vec{R}_A + \vec{F}_n = 0 \\ \vec{M}_A + \vec{M}_n + \vec{h}_A \times \vec{R}_A + \vec{d}_n \times \vec{F}_n + \Sigma \vec{M}_{fA} = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Neglijând efectul momentelor forțelor de frecare:  $\Sigma \vec{M}_{fA} = 0$  și:

$$\begin{cases} \vec{F}_n = \{F_{nx} \quad F_{ny} \quad F_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{R}_A = \{R_{Ax} \quad R_{Ay} \quad R_{Az}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{M}_n = \{M_{nx} \quad M_{ny} \quad M_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{M}_A = \{M_{Ax} \quad M_{Ay} \quad M_{Az}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{d}_n = \{d_{nx} \quad d_{ny} \quad d_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{h}_A = \{h_{Ax} \quad h_{Ay} \quad h_{Az}\}_{3 \times 1}^T \end{cases} \quad (6.9)$$

Pentru  $\Sigma \vec{M}_{fA} \neq 0$  vezi Roboți Industriali – Kovacs F. și Rădulescu C.: Litografia Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1992 – pag. 116.

unde:

- $\vec{F}_n$  - rezultanta forțelor exterioare;
- $\vec{M}_n$  - momentul rezultat al forțelor exterioare;
- $\vec{d}_n$  - perpendiculara din  $O_n$  pe direcția vectorului  $\vec{F}_n$ ;
- $\vec{R}_A$  - reacțiunea din cupla cinematică **A**;
- $\vec{M}_A$  - momentul reactiv din cupla cinematică **A**;
- $\vec{h}_A$  - perpendiculara din  $O_n$  pe direcția vectorului  $\vec{R}_A$ .

Din prima ecuație a relației 6.8 rezultă:

$$\begin{cases} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{cases} = - \begin{cases} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{cases} \quad \begin{cases} R_{Ax} = -F_{nx} \\ R_{Ay} = -F_{ny} \\ R_{Az} = -F_{nz} \end{cases} \quad (6.10)$$

Ceea ce permite, ca din relația 6.7, să se determine elementele matricii Jacobiene din primele trei linii:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial R_{Ax}}{\partial F_{nx}} = -1 & J_{12} &= J_{13} = J_{14} = J_{15} = J_{16} = 0 \\ J_{22} &= \frac{\partial R_{Ay}}{\partial F_{ny}} = -1 & J_{21} &= J_{23} = J_{24} = J_{25} = J_{26} = 0 \\ J_{33} &= \frac{\partial R_{Az}}{\partial F_{nz}} = -1 & J_{31} &= J_{32} = J_{34} = J_{35} = J_{36} = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Neglijând suma momentelor forțelor de frecare  $\Sigma \vec{M}_{fA} = 0$  și efectuând produsele:



$$\vec{h}_A \times \vec{R}_A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ h_{Ax} & h_{Ay} & h_{Az} \\ R_{Ax} & R_{Ay} & R_{Az} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & (h_{Ay}R_{Az} - h_{Az}R_{Ay})\vec{i} - (h_{Ax}R_{Az} - h_{Az}R_{Ax})\vec{j} + \\ & + (h_{Ax}R_{Ay} - h_{Ay}R_{Ax})\vec{k} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\vec{d}_n \times \vec{F}_n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ d_{nx} & d_{ny} & d_{nz} \\ F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & (d_{ny}F_{nz} - d_{nz}F_{ny})\vec{i} - (d_{nx}F_{nz} - d_{nz}F_{nx})\vec{j} + \\ & + (d_{nx}F_{ny} - d_{ny}F_{nx})\vec{k} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Din a doua ecuație a relației 6.8 rezultă:

$$\begin{Bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} M_{nx} \\ M_{ny} \\ M_{nz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} h_{Ay}R_{Az} - h_{Az}R_{Ay} \\ h_{Az}R_{Ax} - h_{Ax}R_{Az} \\ h_{Ax}R_{Ay} - h_{Ay}R_{Ax} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d_{ny}F_{nz} - d_{nz}F_{ny} \\ d_{nz}F_{nx} - d_{nx}F_{nz} \\ d_{nx}F_{ny} - d_{ny}F_{nx} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Ceea ce permite să se determine elementele matricei Jacobiene din ultimele trei linii:

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= -M_{nx} - h_{Ay}R_{Az} + h_{Az}R_{Ay} - d_{ny}F_{nz} + d_{nz}F_{ny} \\ &= -M_{nx} + h_{Ay}F_{nz} - d_{ny}F_{nz} - h_{Az}F_{ny} + d_{nz}F_{ny} \\ &= -M_{nx} - (h_{Az} - d_{nz})F_{ny} + (h_{Ay} - d_{ny})F_{nz} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} J_{41} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{nx}} = 0 & J_{42} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{ny}} = -(h_{Az} - d_{nz}) & J_{43} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial F_{nz}} = +(h_{Ay} - d_{ny}) \\ J_{44} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{nx}} = -1 & J_{45} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{ny}} = 0 & J_{46} &= \frac{\partial M_{Ax}}{\partial M_{nz}} = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} M_{Ay} &= -M_{ny} - h_{Az}R_{Ax} + h_{Ax}R_{Az} - d_{nz}F_{nx} + d_{nx}F_{nz} \\ &= -M_{ny} + h_{Az}F_{nx} - d_{nz}F_{nx} - h_{Ax}F_{nz} + d_{nx}F_{nz} \\ &= -M_{ny} + (h_{Az} - d_{nz})F_{nx} - (h_{Ax} - d_{nx})F_{nz} \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} J_{51} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{nx}} = +(h_{Az} - d_{nz}) & J_{52} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{ny}} = 0 & J_{53} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial F_{nz}} = -(h_{Ax} - d_{nx}) \\ J_{54} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{nx}} = 0 & J_{55} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{ny}} = -1 & J_{56} &= \frac{\partial M_{Ay}}{\partial M_{nz}} = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
M_{Az} &= -M_{nz} - h_{Ax} R_{Ay} + h_{Ay} R_{Ax} - d_{nx} F_{ny} + d_{ny} F_{nx} \\
&= -M_{nz} - h_{Ay} F_{nx} + d_{ny} F_{nx} + h_{Ax} F_{ny} - d_{nx} F_{ny} \\
&= -M_{nz} - (h_{Ay} - d_{ny}) F_{nx} + (h_{Ax} - d_{nx}) F_{ny}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
J_{61} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{nx}} = -(h_{Ay} - d_{ny}) & J_{62} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{ny}} = +(h_{Ax} - d_{nx}) & J_{63} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial F_{nz}} = 0 \\
J_{64} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{nx}} = 0 & J_{65} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{ny}} = 0 & J_{66} &= \frac{\partial M_{Az}}{\partial M_{nz}} = -1
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Elementele matricei Jacobiene sunt:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= J_{22} = J_{33} = J_{44} = J_{55} = J_{66} = -1 \\
J_{42} &= -(h_{Az} - d_{nz}) = -J_{51} \\
J_{43} &= +(h_{Ay} - d_{ny}) = -J_{61} \\
J_{53} &= -(h_{Ax} - d_{nx}) = -J_{62}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Matricea Jacobiană pentru o cuplă conducătoare de rotație are expresia:

$$\underline{J}_{\text{rotatie}} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{42} & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 \\ -J_{42} & 0 & J_{53} & 0 & J_{55} & 0 \\ -J_{43} & -J_{53} & 0 & 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Momentului de echilibrare  $M_{eA}$  din cupla cinematică de rotație  $\mathbf{A}$ , ce acționează pe direcția axei  $z$  și pune în mișcare elementul „ $n$ ” în raport cu „ $n-1$ ”, se obține din relația:

$$M_{eA} = M_{Az} \tag{6.23}$$

## 6.2 Cinetostatica unei cuple conducătoare de translație

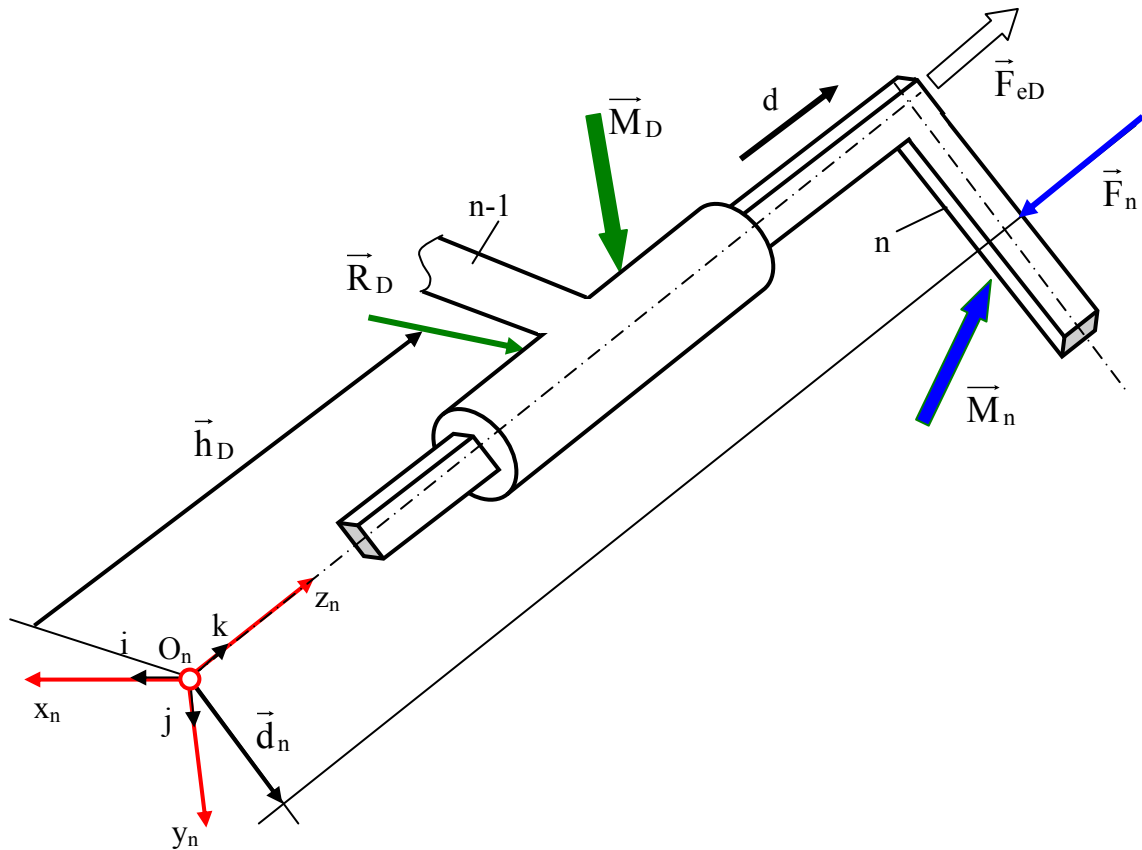


Fig. 6.3 Model de calcul al unei cuple conducătoare de translație

Ecuția de echilibru în cupla cinematică **D** este:

$$\begin{cases} \vec{R}_D + \vec{F}_n + \Sigma \vec{F}_{fD} = 0 \\ \vec{M}_D + \vec{M}_n + \vec{h}_D \times \vec{R}_D + \vec{d}_n \times \vec{F}_n = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Pentru :  $\Sigma \vec{F}_{fD} = 0$  și:

$$\begin{cases} \vec{F}_n = \{F_{nx} & F_{ny} & F_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{R}_D = \{R_{Dx} & R_{Dy} & R_{Dz}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{M}_n = \{M_{nx} & M_{ny} & M_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{M}_D = \{M_{Dx} & M_{Dy} & M_{Dz}\}_{3 \times 1}^T \\ \vec{d}_n = \{d_{nx} & d_{ny} & d_{nz}\}_{3 \times 1}^T & \vec{h}_D = \{0 & 0 & h_{Dz}\}_{3 \times 1}^T \end{cases} \quad (6.25)$$

Pentru  $\Sigma \vec{F}_{fD} \neq 0$  vezi Roboți Industriali – Kovacs F. și Rădulescu C.: Litografia Institutul Politehnic "Traian Vuia" Timișoara, 1992 – pag. 126.

unde:

- $\vec{F}_n$  - rezultanta forțelor exterioare;
- $\vec{M}_n$  - momentul rezultat al forțelor exterioare;
- $\vec{d}_n$  - perpendiculara din  $O_n$  pe direcția vectorului  $\vec{F}_n$ ;
- $\vec{R}_D$  - reacțiunea din cupla cinematică **D**;

$\vec{M}_D$  - momentul reactiv din cupla cinematică  $\mathbf{D}$ ;

$\vec{h}_D$  - paralela cu direcția de mișcare.

Din prima ecuație a relației 6.24 rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Dx} \\ R_{Dy} \\ R_{Dz} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} R_{Dx} = -F_{nx} \\ R_{Dy} = -F_{ny} \\ R_{Dz} = -F_{nz} \end{array} \quad (6.26)$$

Ceea ce permite, ca din relația 6.7, să se determine elementele matricei Jacobiene din primele trei linii:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial R_{Dx}}{\partial F_{nx}} = -1 & J_{12} &= J_{13} = J_{14} = J_{15} = J_{16} = 0 \\ J_{22} &= \frac{\partial R_{Dy}}{\partial F_{ny}} = -1 & J_{21} &= J_{23} = J_{24} = J_{25} = J_{26} = 0 \\ J_{33} &= \frac{\partial R_{Dz}}{\partial F_{nz}} = -1 & J_{31} &= J_{32} = J_{34} = J_{35} = J_{36} = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Neglijând suma forțelor de frecare  $\Sigma \vec{F}_{fD} = 0$  și efectuând produsele:

$$\vec{h}_D \times \vec{R}_D = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & h_{Dz} \\ R_{Dx} & R_{Dy} & R_{Dz} \end{bmatrix} = -h_{Dz} R_{Dy} \vec{i} + h_{Dz} R_{Dx} \vec{j} \quad (6.28)$$

$$\vec{d}_n \times \vec{F}_n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ d_{nx} & d_{ny} & d_{nz} \\ F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{bmatrix} = (d_{ny} F_{nz} - d_{nz} F_{ny}) \vec{i} - (d_{nx} F_{nz} - d_{nz} F_{nx}) \vec{j} + (d_{nx} F_{ny} - d_{ny} F_{nx}) \vec{k} \quad (6.13)$$

Din a doua ecuație a relației 6.24 rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{Dx} \\ M_{Dy} \\ M_{Dz} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} M_{nx} \\ M_{ny} \\ M_{nz} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} -h_{Dz} R_{Dy} \\ h_{Dz} R_{Dx} \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} d_{ny} F_{nz} - d_{nz} F_{ny} \\ d_{nz} F_{nx} - d_{nx} F_{nz} \\ d_{nx} F_{ny} - d_{ny} F_{nx} \end{array} \right\} \quad (6.29)$$

Ceea ce permite să se determine elementele matricei Jacobiene din ultimele trei linii:

$$\begin{aligned}
M_{Dx} &= -M_{nx} + h_{Dz} R_{Dy} - d_{ny} F_{nz} + d_{nz} F_{ny} \\
&= -M_{nx} - h_{Dz} F_{ny} - d_{ny} F_{nz} + d_{nz} F_{ny} \\
&= -M_{nx} - (h_{Dz} - d_{nz}) F_{ny} - d_{ny} F_{nz}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}
J_{41} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial F_{nx}} = 0 \quad J_{42} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial F_{ny}} = -(h_{Dz} - d_{nz}) \quad J_{43} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial F_{nz}} = -d_{ny} \\
J_{44} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial M_{nx}} = -1 \quad J_{45} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial M_{ny}} = 0 \quad J_{46} = \frac{\partial M_{Dx}}{\partial M_{nz}} = 0
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
M_{Dy} &= -M_{ny} - h_{Dz} R_{Dx} - d_{nz} F_{nx} + d_{nx} F_{nz} \\
&= -M_{ny} + h_{Dz} F_{nx} - d_{nz} F_{nx} + d_{nx} F_{nz} \\
&= -M_{ny} + (h_{Dz} - d_{nz}) F_{nx} + d_{nx} F_{nz}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
J_{51} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial F_{nx}} = +(h_{Dz} - d_{nz}) \quad J_{52} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial F_{ny}} = 0 \quad J_{53} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial F_{nz}} = d_{nx} \\
J_{54} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial M_{nx}} = 0 \quad J_{55} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial M_{ny}} = -1 \quad J_{56} = \frac{\partial M_{Dy}}{\partial M_{nz}} = 0
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$M_{Dz} = -M_{nz} - d_{nx} F_{ny} + d_{ny} F_{nx} = -M_{nz} - d_{nx} F_{ny} + d_{ny} F_{nx} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
J_{61} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial F_{nx}} = d_{ny} \quad J_{62} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial F_{ny}} = -d_{nx} \quad J_{63} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial F_{nz}} = 0 \\
J_{64} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial M_{nx}} = 0 \quad J_{65} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial M_{ny}} = 0 \quad J_{66} = \frac{\partial M_{Dz}}{\partial M_{nz}} = -1
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Elementele matricei Jacobiene sunt:

$$\begin{aligned}
J_{11} = J_{22} = J_{33} = J_{44} = J_{55} = J_{66} = -1 \\
J_{42} = -(h_{Dz} - d_{nz}) = -J_{51} \\
J_{43} = -d_{ny} = -J_{61} \\
J_{53} = +d_{nx} = -J_{62}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Matricea Jacobiană pentru o cuplă conducătoare de translație are expresia:

$$\underline{J}_{\text{translatie}} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{42} & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 \\ -J_{42} & 0 & J_{53} & 0 & J_{55} & 0 \\ -J_{43} & -J_{53} & 0 & 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Forța de echilibrare  $F_{eA}$  din cupla cinematică de translație  $\mathbf{D}$ , ce acționează pe direcția axei  $z$  și pune în mișcare elementul „ $n$ ” în raport cu „ $n-1$ ”, se obține din relația:

$$F_{eD} = R_{Dz} \quad (6.38)$$

Analiza cinetostatică se efectuează pentru fiecare cuplă conducătoare în parte, pornind de la efectul final. Torsorul forțelor exterioare (forța gravitațională, forțele tehnologice și momentul rezultat al forțelor exterioare) ce încarcă elementul „ $n$ ” și cupla cinematică  ${}^{n-1}\mathbf{C}_n$ , permit determinarea reacțiunilor dinamice și a forței, respectiv momentului de echilibrare cu ajutorul căreia se poate alege motorul de antrenare liniar, respectiv rotativ.

Forța, respectiv momentul de echilibrare astfel determinat se va îngloba în torsorul forțelor exterioare (reacțiunea și momentul reactiv ce încarcă elementul „ $n-1$ ”), ceea ce permite determinarea reacțiunii și forței, respectiv momentului de echilibrare din cupla conducătoare  ${}^{n-2}\mathbf{C}_{n-1}$  ș.a.m.d.

## 7. MODELUL DINAMIC AL DISPOZITIVULUI DE GHIDARE AL ROBOȚILOR

În capitolele precedente am studiat modelul matematic al manipulării într-o celulă de fabricație flexibilă, modelele geometrice ale situării obiectului manipulat, modelul cinematic și modelul cinetostatic al dispozitivului de ghidare al roboților, dar nu am considerat niciodată forța ca o cauză a mișcării. În acest capitol vom considera ecuațiile de mișcare ale roboților pe baza forței, respectiv momentului de acționare al motorului. Dinamica roboților va fi studiată pe **structuri de roboți** având la bază **lanțuri cinematice deschise**. Dinamica roboților comportă două probleme:

- ⇒ prima problemă o reprezintă cazul când se impune un punct pe traiectorie,  **$q, \dot{q}, \ddot{q}$**  și dorim să aflăm momentul motor  **$M_m$** , cazul **conducerea robotului**;
- ⇒ a doua problemă este cum să calculăm mișcarea mecanismului la aplicarea unor forțe, respectiv momente motoare în cuple conducătoare. Deci se cunoaște momentul de acționare  **$M_m$**  și se calculează  **$q, \dot{q}, \ddot{q}$** , cazul **simularea mișcării robotului**.

### 7.1 Modelul Lagrange – Euler

Modelul dinamic al unui robot utilizând metoda Lagrange – Euler este simplă și sistematică. Ecuațiile mișcării ce se obțin sunt de ordinul doi, ecuații diferențiale neliniare specifice **mișcărilor cuplate**. De precizat că pentru a simplifica aceste ecuații s-au neglijat dinamica conducerii și forțele de frecare din angrenaje.

Formalismul lagrangean se bazează pe funcția lui Lagrange definită prin:

$$L = E_c - E_p \quad (7.1)$$

Ecuțiile dinamice clasice exprimate în termenii funcției lagrangene sunt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = \overline{1, n} \quad (7.2)$$

unde  $n$  este numărul de grade de mobilitate al robotului,  $q_i$  – coordonata generalizată,

$\dot{q}_i$  – viteza generalizată, iar  $Q_i$  – forța generalizată.

Ecuțiile dinamice pentru un robot se obțin în 5 pași:

- se calculează viteza liniară a tuturor punctelor materiale ale elementelor;
- se calculează energia cinetică  $E_{ci} = 0,5 m \cdot v^2$ ;
- se calculează energia potențială  $E_p = m g h$ ;
- se formează funcția lui Lagrange  $L = E_c - E_p$ ;

- se determină ecuația dinamică  $Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, n}$

- [Calculul vitezei unui punct al robotului](#)

Un punct material aparținând elementului „ $i$ ” este definit în raport cu sistemul de referință propriu prin vectorul de poziție:

$${}^i \vec{r} = \{x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1\}^T \quad (7.3)$$

iar în raport cu sistemul de referință fix prin vectorul de poziție:

$${}^0 \vec{r} = \{x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad 1\}^T \quad (7.4)$$

Relația de legătură dintre cei doi vectori de poziție:

$${}^0 \vec{r} = {}^0 \underline{T}_i \cdot {}^i \vec{r} \quad {}^0 \underline{T}_i = {}^0 \underline{T}_i(q_j) \quad q_j = q_j(t) \quad j = \overline{1, i} \quad (7.5)$$

iar viteza:

$${}^0 \dot{\vec{r}} = \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0 \underline{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot {}^i \vec{r} \quad \frac{\partial}{\partial t} ({}^i \dot{\vec{r}}) = 0 \quad {}^i \vec{r} = \text{constan t} \quad (7.6)$$



Pătratul vitezei se exprimă prin produsul scalar:

$$\left({}^0\dot{\vec{r}}\right)^2 = {}^0\dot{\vec{r}} \cdot {}^0\dot{\vec{r}} \quad (7.7)$$

sau prin urma matricei produs (la o matrice pătratică suma pătratelor elementelor de pe diagonala principală):

$$\left({}^0\dot{\vec{r}}\right)^2 = \text{TR}\left({}^0\dot{\vec{r}} \cdot {}^0\dot{\vec{r}}^T\right) \quad (7.8)$$

care conduce la:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 &= \text{TR}\left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot {}^i\vec{r} \cdot \left(\sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot {}^i\vec{r}\right)^T\right] = \\ &= \text{TR}\left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} \cdot {}^i\vec{r} \cdot ({}^i\vec{r})^T \cdot \left(\frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_k}\right)^T \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k\right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

### b. [Calculul energiei cinetice](#)

Energia cinetică a unei particule de masă „ $dm$ ” localizată în elementul „ $i$ ” prin vectorul de poziție  ${}^i\vec{r}$  este:

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \cdot dm = \text{TR}\left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} \cdot {}^i\vec{r} \cdot ({}^i\vec{r})^T \cdot dm \left(\frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_k}\right)^T \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k\right] \quad (7.10)$$

Energia cinetică a elementului „ $i$ ” este suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor materiale ale elementului „ $i$ ”:

$$E_c = \int_{M_i} dE_{ci} = \frac{1}{2} \text{TR}\left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_j} \cdot \int_{M_i} {}^i\vec{r} \cdot ({}^i\vec{r})^T \cdot dm \left(\frac{\partial {}^0\mathbf{T}_i}{\partial q_k}\right)^T \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k\right] \quad (7.11)$$

Matricea de inerție:

$$\underline{J}_i = \int_{M_i} {}^i\vec{r} \cdot ({}^i\vec{r})^T \cdot dm \quad (7.12)$$

sau:

$$\int_{M_i} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \{x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1\} dm = \begin{bmatrix} \int_{M_i} x_i^2 dm & \int_{M_i} x_i y_i dm & \int_{M_i} x_i z_i dm & \int_{M_i} x_i dm \\ \int_{M_i} y_i x_i dm & \int_{M_i} y_i^2 dm & \int_{M_i} y_i z_i dm & \int_{M_i} y_i dm \\ \int_{M_i} z_i x_i dm & \int_{M_i} z_i y_i dm & \int_{M_i} z_i^2 dm & \int_{M_i} z_i dm \\ \int_{M_i} x_i dm & \int_{M_i} y_i dm & \int_{M_i} z_i dm & \int_{M_i} dm \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Ținând cont de momentele de inerție axiale și a centrifugale, în raport cu sistemul de referință propriu elementului „i”:

$$\begin{aligned} I_{i_{xx}} &= \int_{M_i} (y_i^2 + z_i^2) dm & I_{i_{xy}} &= \int_{M_i} x_i y_i dm \\ I_{i_{yy}} &= \int_{M_i} (z_i^2 + x_i^2) dm & I_{i_{xz}} &= \int_{M_i} x_i z_i dm \\ I_{i_{zz}} &= \int_{M_i} (x_i^2 + y_i^2) dm & I_{i_{yz}} &= \int_{M_i} y_i z_i dm \end{aligned} \quad (7.14)$$

și a momentelor statice mecanice:

$$\int_{M_i} x_i dm = M_i \bar{x}_i \quad \int_{M_i} y_i dm = M_i \bar{y}_i \quad \int_{M_i} z_i dm = M_i \bar{z}_i \quad (7.15)$$

unde  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  sunt coordonatele centrului de greutate al elementului „i”, în care este concentrată masa  $M_i$ .

Întrucât:

$$\begin{aligned} \int_{M_i} x_i^2 dm &= -\frac{1}{2} \int_{M_i} (y_i^2 + z_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (z_i^2 + x_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (x_i^2 + y_i^2) dm = \\ &= \frac{1}{2} (-I_{i_{xx}} + I_{i_{yy}} + I_{i_{zz}}) \\ \int_{M_i} y_i^2 dm &= -\frac{1}{2} \int_{M_i} (z_i^2 + x_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (x_i^2 + y_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (y_i^2 + z_i^2) dm = \\ &= \frac{1}{2} (I_{i_{xx}} - I_{i_{yy}} + I_{i_{zz}}) \end{aligned} \quad (7.16 a)$$

$$\int_{M_i} z_i^2 dm = -\frac{1}{2} \int_{M_i} (x_i^2 + y_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (y_i^2 + z_i^2) dm + \frac{1}{2} \int_{M_i} (z_i^2 + x_i^2) dm =$$

$$= \frac{1}{2} (I_{i_{xx}} + I_{i_{yy}} - I_{i_{zz}})$$
(7.16 b)

rezultă:

$$\underline{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{i_{xx}} + I_{i_{yy}} + I_{i_{zz}}}{2} & I_{i_{xy}} & I_{i_{xz}} & M_i \bar{x}_i \\ I_{i_{yx}} & \frac{I_{i_{xx}} - I_{i_{yy}} + I_{i_{zz}}}{2} & I_{i_{yz}} & M_i \bar{y}_i \\ I_{i_{zx}} & I_{i_{zy}} & \frac{I_{i_{xx}} + I_{i_{yy}} - I_{i_{zz}}}{2} & M_i \bar{z}_i \\ M_i \bar{x}_i & M_i \bar{y}_i & M_i \bar{z}_i & M_i \end{bmatrix}$$
(7.17)

ceea ce permite reformularea relației:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_j} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right]$$
(7.18)

Energia cinetică totală ale elementelor componente ale dispozitivului de ghidare:

$$E_c = \sum_{i=1}^6 E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_j} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k$$
(7.19)

### c. [Calculul energiei potențiale](#)

Energia potențială a elementului „i” de masă  $M_i$ , admițând că nivelul de potențial

zero este planul  $x_i O_i y_i$  al sistemului de referință propriu elementului „i”, este

exprimată de relația:

$$E_{p_i} = -M_i \cdot \bar{\mathbf{g}}^T \cdot \left( {}^0 \underline{T}_i \cdot {}^i \bar{\mathbf{r}}_{ci} \right)$$
(7.20)

unde vectorul accelerație gravitațională este:

$${}^i \bar{\mathbf{g}} = \{0 \quad 0 \quad g_i \quad 1\}^T$$
(7.21)

iar vectorul de poziție al centrului de greutate  $C_i$  al elementului „ $i$ ”, în care este

concentrată masa  $M_i$  a acestui element este: 
$${}^i \vec{r}_{ci} = \left\{ \bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{z}_i \quad 1 \right\}^T \quad (7.22)$$

Energia potențială totală a elementelor dispozitivului de ghidare este:

$$E_p = \sum_{i=1}^6 E_{p_i} = - \sum_{i=1}^6 M_i \cdot \vec{g}^T \cdot \left( {}^0 \underline{T}_i {}^i \vec{r}_{ci} \right) \quad (7.23)$$

d. [Funcția Lagrange](#)

$$L = E_c - E_p \quad (7.1)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_j} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \sum_{i=1}^6 M_i \cdot \vec{g}^T \cdot \left( {}^0 \underline{T}_i {}^i \vec{r}_{ci} \right) \quad (7.24)$$

f. [Ecuațiile dinamice](#)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} = Q_i \quad p = \max i, j, k \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^6 \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_p} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_k \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) &= \sum_{i=p}^6 \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_p} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{i=p}^6 \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^2 {}^0 \underline{T}_i}{\partial q_p \partial q_m} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_m + \\ &+ \sum_{i=p}^6 \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_p} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^2 {}^0 \underline{T}_i}{\partial q_k \partial q_m} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_m \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_p} = \sum_{i=p}^6 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{TR} \left[ \frac{\partial^2 {}^0 \underline{T}_i}{\partial q_j \partial q_p} \cdot \underline{J}_i \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \right] \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_p + \sum_{i=p}^6 M_i \cdot \vec{g}^T \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_i}{\partial q_p} {}^i \vec{r}_{ci} \right) \quad (7.28)$$

Având în vedere că ecuațiile dinamice sunt independente de ordinea de sumare se evidențiază următoarea formă:

$$\sum_{j=1}^i \underline{D}_{ij} \cdot \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \underline{D}_{ijk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \underline{D}_i = \underline{Q}_i \quad i = \overline{1,6} \quad (7.29)$$

unde  $\ddot{\underline{q}}_i$  - accelerația generalizată  $\ddot{\underline{q}}_i = \{\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dots \quad \ddot{q}_n\}^T$

$\dot{\underline{q}}_j$  - viteza generalizată  $\dot{\underline{q}}_j \dot{\underline{q}}_k = \{\dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad \dot{q}_1 \dot{q}_3 \quad \dots \quad \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n\}^T$

$$\dot{\underline{q}}_k^2 = \{\dot{q}_1^2 \quad \dot{q}_2^2 \quad \dots \quad \dot{q}_n^2\}^T \quad (7.30)$$

$\underline{D}_{ij}$  - este termenul inerțial:

$$\underline{D}_{ij} = \sum_{p=\max i,j}^6 \text{TR} \left[ \frac{\partial^0 \underline{T}_p}{\partial q_j} \cdot \underline{J}_p \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_p}{\partial q_i} \right)^T \right] \quad (7.31)$$

pentru:  $i = j$   $\underline{D}_{ii}$  este termenul **inerțial** al cuplei conducătoare „i”;

pentru:  $i \neq j$   $\underline{D}_{ij}$  este **cuplarea efectului inerțial** între cuplele conducătoare „i” și „j”;

Termenul **cinetic**: 
$$\underline{D}_{ijk} = \sum_{p=\max i,j,k}^6 \text{TR} \left[ \frac{\partial^2 \underline{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \cdot \underline{J}_p \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_p}{\partial q_i} \right)^T \right] \quad (7.32)$$

pentru:  $j = k$   $\underline{D}_{ijj}$  este termenul **forței centrifugale** al cuplei conducătoare „i”,

dependent de accelerația cuplei „j”;

pentru  $j \neq k$   $\underline{D}_{ijk}$  este termenul **forței Coriolis** al cuplei conducătoare „i”, dependent

de accelerația cuplelor „j” și „k”;

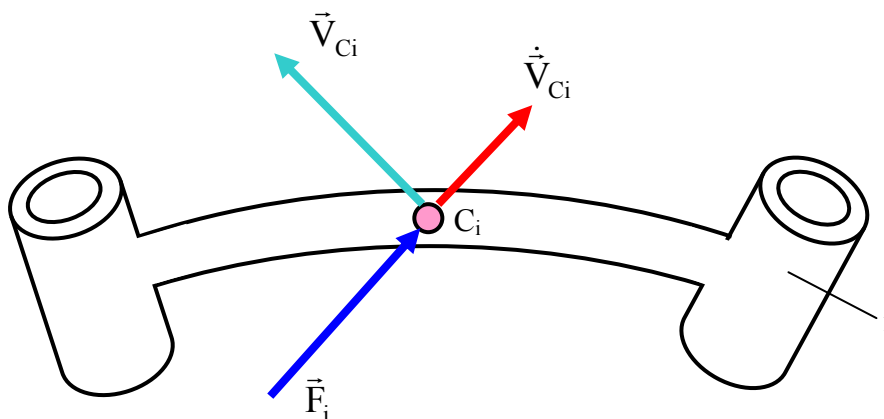
Termenul **gravitațional**  $\underline{D}_i$  ce încarcă cupla conducătoare „i”:

$$\underline{D}_i = - \sum_{p=1}^6 M_i \cdot \vec{g}^T \cdot \left( \frac{\partial^0 \underline{T}_p}{\partial q_i} \right)^T \vec{r}_{ci} \quad i = \overline{1,6} \quad (7.33)$$

Matricele  $\underline{D}$  depind de dimensiunea elementelor, de masele lor și de masa manipulată, de poziție centrelor de greutate, momentul de inerție masic și de poziția momentană. Interdependența dintre parametri cinematici generalizați duce la o **cuplare a mișcărilor**. Termenii **inerțiali și gravitaționali** sunt importanți în **conducerea robotului**, deoarece afectează **stabilitatea și precizia de situare**. Termenii **centrifugal și Coriolis** sunt importanți dacă mișcarea are loc cu o **viteză mare**.

## 7.2 Modelul Newton – Euler

Se va considera fiecare element al dispozitivului de ghidare ca un solid rigid. Dacă cunoaștem centrul de masă și tensorul de inerție al elementului, atunci distribuția masei este complet caracterizată. Pentru a mișca elementul se impune accelerarea lui. Forța de inerție necesară este în funcție de masa și accelerația dorită a elementului. Ecuația lui Newton pentru mișcarea de translație și ecuația lui Euler pentru mișcarea de rotație fac legătura dintre forța de inerție, masă și accelerație.

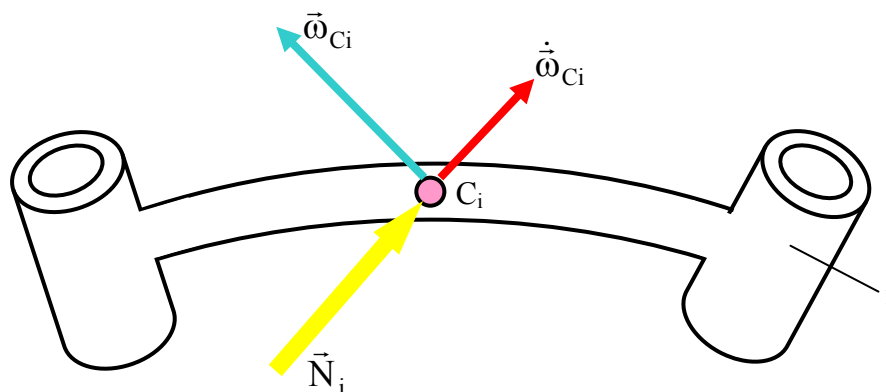


**Fig. 7.1 Acțiunea unei forțe în centrul de masă**

În **Fig. 7.1** un element avînd centrul de masă  $C_i$  va cauza accelerația conform

**ecuației lui Newton:** 
$$\vec{F}_i = M_i \cdot \dot{\vec{V}}_{C_i} \quad (7.34)$$

unde  $M_i$  este masa elementului „i”.



**Fig. 7.2 Acțiunea unui moment în centrul de masă**

În **Fig. 7.2** se arată un element rotindu-se cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_i$  și accelerația  $\dot{\vec{\omega}}_i$ . În această situație, momentul  $N_i$  cu care va fi acționat elementul, va cauza această mișcare conform **ecuației lui Euler**:

$$\vec{N}_i = {}^{Ci}I_i \cdot \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times {}^{Ci}I_i \cdot \vec{\omega}_i \quad (7.35)$$

unde  ${}^{Ci}I_i$  – tensorul inerțial, relativ la un sistem de axe cu centrul în  $C_i$ ;

$F_i$  – rezultanta forțelor exterioare ce acționează în centrul de masă;

$N_i$  – momentul rezultat al forțelor exterioare în raport cu centrul de masă  $C_i$ ;

### 7.2.1 Metoda iterativă Newton – Euler

Stabilirea ecuațiilor dinamice prin metoda iterativă, care pune în evidență variabilele generalizate, forțele generalizate motoare și forțele de legătură dintre elementele componente ale robotului.

- Metoda iterației de la baza robotului spre efectorul final.** Pentru fiecare element se determină viteza și accelerația liniare și unghiulare, respectiv forțele și momentele forțelor exterioare conform ecuațiilor dinamice Newton – Euler.
- Metoda iterației de la efectorul final spre baza robotului.** Pentru fiecare element se determină forțele și momentele forțelor de legătură dintre

elementele „ $i-1-i$ ” și „ $i-i+1$ ”, respectiv forțele generalizate motoare din cuplele cinematice conducătoare ale robotului.

a) Metoda iterației de la baza robotului spre efectorul final ( $i = 1 \dots n$ )

În ordine pentru calculul forței de inerție ce acționează asupra elementelor, se calculează viteza de rotație, accelerația liniară și unghiulară a centrului de masă al fiecărui element. Iterația pornește cu elementul **1** și continuă element cu element spre efectorul final „**n**”.

Propagarea vitezei unghiulare de la element la element:

$${}^i\vec{\omega}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + \Delta_i \dot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i \quad \text{unde} \quad \Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{daca } i = \text{rotatie} \\ 0 & \text{daca } i = \text{translatie} \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (7.36)$$

Viteza liniară a originii fiecărui sistem al elementului „**i**”:

$${}^i\vec{V}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[ {}^{i-1}\vec{V}_{i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_i \right] + \Delta_i \dot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i \quad \text{unde} \quad \Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{daca } i = \text{rotatie} \\ 0 & \text{daca } i = \text{translatie} \end{cases} \quad (7.37)$$

Accelerația unghiulară de la un element la altul:

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \Delta_i \left[ {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times \dot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i + \ddot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i \right] \quad (7.38)$$

Accelerația liniară a originii fiecărui sistem al elementului „**i**”:

$${}^i\dot{\vec{V}}_i = {}^i\mathbf{R}_{i-1} \left[ {}^{i-1}\dot{\vec{V}}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_i + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times \left( {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_i \right) \right] + \Delta_i \left[ 2 {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times \dot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i + \ddot{q}_i {}^i\mathbf{k}_i \right] \quad (7.39)$$

Accelerația centrului de masă:

$${}^i\dot{\vec{V}}_{Ci} = {}^i\dot{\vec{V}}_i + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{r}_{Ci} + {}^i\vec{\omega}_i \times \left( {}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{r}_{Ci} \right) \quad (7.40)$$

De notat că pentru elementul **0** se obține  ${}^0\vec{\omega}_0 = {}^0\dot{\vec{\omega}}_0 = \mathbf{0}$ . Având calculate accelerațiile

liniare și unghiulare ale centrului de masă al fiecărui element se aplică ecuațiile lui



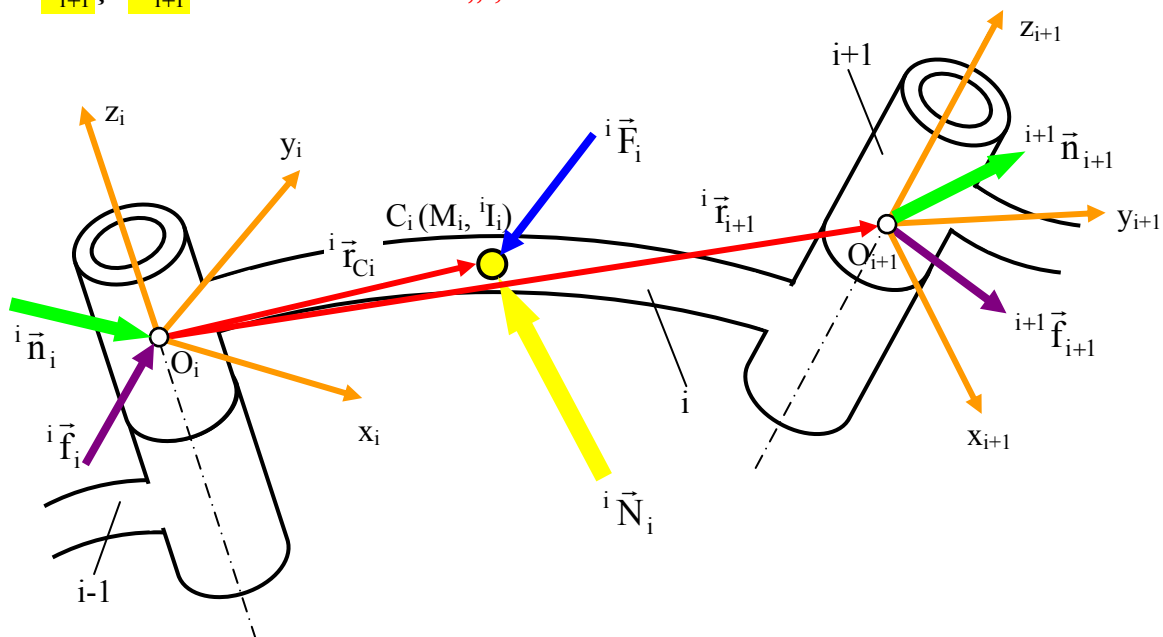
Newton – Euler pentru a calcula forța de inerție și momentul necesar acționării centrului de masă al fiecărui element.

$${}^i\vec{F}_i = M_i \cdot {}^i\dot{\vec{V}}_{Ci} \quad (7.41)$$

$${}^i\vec{N}_i = {}^{Ci}I_i \cdot {}^i\dot{\vec{\omega}}_{Ci} + {}^i\vec{\omega}_i \times {}^{Ci}I_i \cdot {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \quad (7.42)$$

### b) Metoda iterației de la efectorul final spre baza robotului ( $i = n \dots 1$ )

Având calculate forța și momentul ce acționează asupra fiecărui element, ne rămâne să calculăm forța / momentul ce rezultă în fiecare articulație. Acestea se obțin prin scrierea unei ecuații de echilibru a fiecărui element. Asupra fiecărui element acționează forțe și momente exterioare, care sunt echilibrate de forțele și momentele de legătură  $\vec{f}_i$  și  $\vec{n}_i$  dintre elementele „ $i - 1, i$ ” respectiv forțele și momentele de legătură  $\vec{f}_{i+1}$  și  $\vec{n}_{i+1}$  dintre elementele „ $i, i + 1$ ”



**Fig. 7.3 Starea de echilibru al elementului „i”**

$\vec{f}_i$  – forța exercitată de elementul „i” asupra elementului „i-1”;

$\vec{n}_i$  – momentul exercitat de elementul „i” asupra elementului „i-1”.

Sumând forțele ce acționează asupra elementului ”i” scriem de fapt ecuația de echilibru a elementului ”i”:

$${}^i\vec{F}_i = {}^i\vec{f}_i - {}^i\vec{f}_{i+1} = {}^i\vec{f}_i - {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} \quad (7.43)$$

Sumând momentele ce acționează în raport cu centrul de masă se obține ecuația de echilibru a momentelor:

$$\begin{aligned} {}^i\vec{N}_i &= {}^i\vec{n}_i - {}^i\vec{n}_{i+1} - {}^i\vec{r}_{Ci} \times {}^i\vec{f}_i - ({}^i\vec{r}_{i+1} - {}^i\vec{r}_{Ci}) \times {}^i\vec{f}_{i+1} = \\ &= {}^i\vec{n}_i - {}^i\vec{n}_{i+1} - {}^i\vec{r}_{Ci} \times {}^i\vec{f}_i - {}^i\vec{r}_{i+1} \times {}^i\vec{f}_{i+1} + {}^i\vec{r}_{Ci} \times {}^i\vec{f}_{i+1} = \\ &= {}^i\vec{n}_i - {}^i\vec{n}_{i+1} - {}^i\vec{r}_{Ci} \times ({}^i\vec{f}_i - {}^i\vec{f}_{i+1}) - {}^i\vec{r}_{i+1} \times {}^i\vec{f}_{i+1} = \\ &= {}^i\vec{n}_i - {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^i\vec{r}_{Ci} \times {}^i\vec{F}_i - {}^i\vec{r}_{i+1} \times {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} \end{aligned} \quad (7.44)$$

În final se pot rearanja relațiile de echilibru ale forței și momentelor astfel ca ele să devină relații iterative, de la elementul „n la 1”.

$$\begin{aligned} {}^i\vec{f}_i &= {}^i\vec{F}_i + {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} \\ {}^i\vec{n}_i &= {}^i\vec{N}_i + {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{n}_{i+1} + {}^i\vec{r}_{Ci} \times {}^i\vec{F}_i + {}^i\vec{r}_{i+1} \times {}^i\mathbf{R}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\vec{f}_{i+1} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Forța generalizată motoare  ${}^i\vec{Q}_m$  din cupla cinematică conducătoare este:

$${}^i\vec{Q}_m = \Delta_i \cdot {}^i\vec{n}_i^T \cdot {}^i\vec{k}_i + (1 - \Delta_i) \cdot {}^i\vec{f}_i^T \cdot {}^i\vec{k}_i + {}^i\vec{Q}_f \quad (7.46)$$

unde pentru:

$$\begin{aligned} \Delta_i = 1 \quad \text{daca} \quad i = \text{rotatie} \quad & {}^i\vec{Q}_m = {}^i\vec{n}_i^T \cdot {}^i\vec{k}_i + {}^i\vec{Q}_f \\ \Delta_i = 0 \quad \text{daca} \quad i = \text{translatie} \quad & {}^i\vec{Q}_m = {}^i\vec{f}_i^T \cdot {}^i\vec{k}_i + {}^i\vec{Q}_f \end{aligned} \quad (7.47)$$

${}^i\vec{Q}_f$  - este forța generalizată datorită frecărilor vâscoase, având expresia:

$${}^i\vec{Q}_f = \mathbf{b}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \cdot {}^i\vec{Q}_{fc} \quad (7.48)$$

$\mathbf{b}_i$  - coeficient de frecare vâscoasă;

${}^i\vec{Q}_{fc}$  - este forța generalizată datorită frecărilor uscate (coulombiene), având expresia:

$${}^i\bar{Q}_{fc} = \Delta_i \cdot c_i \cdot \frac{d_i}{2} \cdot \left| {}^i\bar{k}_i \times {}^i\bar{f}_i \right| \cdot \text{sign}(\dot{q}_i) + (1 - \Delta_i) \cdot c_i \cdot \left| {}^i\bar{k}_i \times {}^i\bar{f}_i \right| \cdot \text{sign}(\dot{q}_i) \quad (7.49)$$

unde pentru:

$$\Delta_i = 1 \quad \text{daca} \quad i = \text{rotatie} \quad {}^i\bar{Q}_{fc} = c_i \cdot \frac{d_i}{2} \cdot \left| {}^i\bar{k}_i \times {}^i\bar{f}_i \right| \cdot \text{sign}(\dot{q}_i) \quad (7.50)$$

$$\Delta_i = 0 \quad \text{daca} \quad i = \text{translatie} \quad {}^i\bar{Q}_{fc} = c_i \cdot \left| {}^i\bar{k}_i \times {}^i\bar{f}_i \right| \cdot \text{sign}(\dot{q})$$

$c_i$  - coeficient de frecare uscată;

$d_i$  – diametrul fusului din cupla de rotație.

### 7.3 Modelul Apple

Ecuatiile lui Apple permit exprimarea dinamicii sistemelor mecanice. Ecuatiile lui

Apple au fost introduse pentru a descrie dinamica **sistemelor non - holonomice**. In

continuare se tratează utilizarea ecuațiilor lui Apple pentru sisteme de rigide cuplate.

Se consideră un sistem de **N** particule notate cu  $l = 1, 2, \dots, N$ . Fie ca particula **l** să

aibă masa  $m_l$  și vectorul de poziție  $\bar{r}_l$ . Atunci poziția sistemul este definită prin

vectorii:  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$ . Fiecare vector de poziție se poate proiecta într-un sistem de

referință cartezian având proiecțiile:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}$ .

Deci poziție sistemului de particule (solidul rigid) este definită printr-un vector de

dimensiunea **3N**  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N})^T$ .

Să luăm în considerare constrângerile impuse sistemului:

$$f(x, t) = 0 \quad \text{sau} \quad f(x) = 0 \quad (7.51)$$

numite **constrângeri geometrice** sau **constrângeri holonomice**. Dacă un sistem este în

mișcare și este supus numai la astfel de constrângeri atunci vorbim de **sisteme holonomice**.

Dacă constrângerile au o formă neintegrabilă:

$$\sum_{v=1}^{3N} A_v(x, t) \cdot dx_v + A \cdot dt = 0 \quad \text{sau} \quad \sum_{v=1}^{3N} A_v(x) \cdot dx_v = 0 \quad (7.52)$$

atunci acestea se numesc **constrângeri non – holonomice**. Dacă ele sunt impuse unui sistem atunci vorbim de **sisteme non – holonomice**.

Constrângerile la care timpul nu este exprimat în mod explicit se cheamă **scleronome** sau **constrângeri statice**. Dacă este explicitată dependența de timp, aceste constrângeri sunt **reonome** sau **constrângeri dinamice**. Considerăm un sistem de particule în mișcare supus la **k** constrângeri holonomice (geometrice):

$$f_{\mu}(x, t) = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, k \quad (7.53)$$

Conform principiului lui d'Alembert, dinamica unui sistem holonomic se poate descrie prin ecuațiile diferențiale:

$$\vec{F}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \vec{R}_1 = 0 \quad (7.54)$$

unde:  $\vec{F}_1$  - rezultanta forțelor active ce acționează asupra particulelor  $m_i$ ;

$\vec{R}_1$  - rezultanta forțelor reactive pe care le impun constrângerile.

Numărul de ecuații necesare pentru a rezolva dinamica unui asemenea sistem este mai mare decât numărul de grade de libertate ale sistemului. Sistemul are  $n = 3N + k$  grade de libertate, iar aici avem nevoie de  $3N+k$  ecuații scalare ( $3N$  ecuații diferențiale de tipul (7.54), pentru că sunt  $\vec{r}_N$  vectori de poziție cu câte 3 proiecții și  $k$  ecuații de legătură de tipul (7.53) aferente fiecărei constrângeri în parte).

Se pune întrebarea care este setul de ecuații minimal pentru a descrie dinamica sistemului. În acest scop pentru a deriva ecuațiile lui Apple se utilizează metoda deplasărilor virtuale:

$$(\vec{F}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \vec{R}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 = 0 \quad l = \overline{1, N} \quad (7.55)$$

unde  $\delta \vec{r}_1$  - este deplasarea virtuală a particulei „1”.

Dacă sumăm pentru toate particulele  $i = \overline{1, N}$ :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7.56)$$

Vom lua în considerare numai constrângerile geometrice ideale pentru care

$\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ , adică  $\vec{R}_i$  este perpendicular pe  $\delta \vec{r}_i$ , atunci:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7.57)$$

Această ecuație unește principiul lui d'Alembert și principiul deplasărilor virtuale al lui Lagrange. De aceea de multe ori se cheamă ecuațiile lui d'Alembert - Lagrange.

Introducem proiecțiile carteziene cu următoarele notații:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x_1, x_2, x_3), \vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6), \dots, \vec{r}_N = (x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}) \\ \vec{F}_1 &= (P_1, P_2, P_3), \vec{F}_2 = (P_4, P_5, P_6), \dots, \vec{F}_N = (P_{3N-2}, P_{3N-1}, P_{3N}) \end{aligned} \quad (7.58)$$

și o renumerotare a maselor:

$$m_1 \rightarrow m_1, m_2, m_3 \quad m_2 \rightarrow m_4, m_5, m_6 \quad \dots \quad m_N \rightarrow m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N} \quad (7.59)$$

Cu aceste notații ecuația (7.57) ia forma:

$$\sum_{v=1}^{3N} (P_v - m_v \ddot{x}_v) \cdot \delta x_v = 0 \quad (7.60)$$

Sistemul de  $N$  particule supus la  $k$  constrângeri are  $n = 3N - k$  grade de libertate, iar coordonatele  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$  nu sunt independente datorită constrângerilor. Se definesc  $n$  parametri independenți  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , care determină poziția sistemului și care se cheamă coordonate generalizate. Deci fiecare coordonată carteziană  $x_v$  se poate exprima în funcție de aceste coordonate generalizate și timp:

$$x_v = x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad q_i = q_i(t) \quad i = \overline{1, n} \quad (7.61)$$

Pentru un sistem staționar timpul  $t$  nu este explicit exprimat. Deplasarea virtuală  $\delta x_v$  se exprimă prin relația:

$$\delta x_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \delta q_i \quad a_{vi} = \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \quad (7.62)$$

Înlocuind relația (7.62) în relația (7.60)

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{3N} (P_v - m_v \ddot{x}_v) \cdot \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \delta q_i &= 0 \\ \sum_{v=1}^{3N} P_v \cdot \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \delta q_i - \sum_{v=1}^{3N} m_v \ddot{x}_v \cdot \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \delta q_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{3N} m_v \cdot \ddot{x}_v \cdot a_{vi} \cdot \delta q_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{3N} P_v \cdot a_{vi} \cdot \delta q_i \end{aligned} \quad (7.63)$$

Termenul din membrul drept reprezintă lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor active ce acționează asupra sistemului. Introducând notația:

$$Q_i = \sum_{v=1}^{3N} P_v \cdot a_{vi} \quad i = \overline{1, n} \quad (7.64)$$

Lucrul mecanic virtual primește forma:

$$dA = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \quad (7.65)$$

unde  $Q_i$  este forța generalizată corespunzătoare coordonatelor generalizate. Pentru a transforma membrul stâng al ecuației (7.63 – ultima linie), se derivă expresia (7.61):

$$\begin{aligned} \dot{x}_v &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial x_v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \dot{q}_i + a_{vi} \quad a_v = \frac{\partial x_v}{\partial t} \\ \ddot{x}_v &= \sum_{i=1}^n a_{vi} \cdot \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{vi}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{vi}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{vi}}{\partial t} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial a_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.66)$$

De unde se observă că  $a_{vi}$  se poate exprima și sub forma:

$$a_{vi} = \frac{\delta \ddot{x}_v}{\delta \ddot{q}_i} \quad (7.67)$$

Revenind la membrul stâng al relației (7.63 – ultima linie) se obține:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{3N} m_v \cdot \ddot{x}_v \cdot a_{vi} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{3N} m_v \cdot \ddot{x}_v \cdot \frac{\delta \ddot{x}_v}{\delta \ddot{q}_i} \cdot \delta q_i \quad (7.68)$$

Introducând funcția **S**:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{v=1}^{3N} m_v \cdot \ddot{x}_v^2 \quad (7.69)$$

numită **energia de accelerare**. Este evidentă relația:

$$\sum_{v=1}^{3N} m_v \cdot \ddot{x}_v^2 \cdot \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \quad i = \overline{1, n} \quad (7.70)$$

Deci membrul stâng se poate scrie și sub forma:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0 \quad (7.71)$$

Deoarece deplasare virtuală  $\delta q_i$  este o variabilă independentă, rezultă drept

consecință că **forma finală a ecuațiilor lui Apple**:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \quad i = \overline{1, n} \quad (7.72)$$

Deci problema **modelului dinamic** se reduce la exprimarea **energiei de accelerație S**

în funcție de **coordonatele generalizate**. Aplicând **ecuațiile lui Apple** la un robot,

rezultă că este suficient să calculăm **energia de accelerație** a unui element (corp rigid)

și să sumăm toate elementele lanțului cinematic pentru a determina **funcția S**.

De exemplu funcția  $S$  este exprimată în funcție de coordonatele generalizate  $q_i$ ,

utilizând o expresie de recurență a accelerației. Pornind de la expresia care consideră

corpul rigid ca un sistem de particule:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left( \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \right)^2 \quad (7.73)$$

Dacă introducem centrul de masă cu vectorul său de poziție  $\vec{r}_c$ , atunci:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i' \quad (7.74)$$

unde  $\vec{r}_i'$  este vectorul de poziție al particulei  $m_i$ , raportat la centrul de masă  $C_1$ .

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \left( \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[ \left( \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} + \left( \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot M \left( \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \right)^2 + \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.75)$$

unde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  este masa totală a corpului rigid.

Expresia

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i' \right) \quad (7.76)$$

conduce la:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i' = 0 \quad \text{în raport cu centrul de masă } C_1. \quad (7.77)$$

Utilizând relațiile (7.76) și (7.77) în relația (7.75) obținem:

$$S = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \vec{a}_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i'^2 \quad (7.78)$$

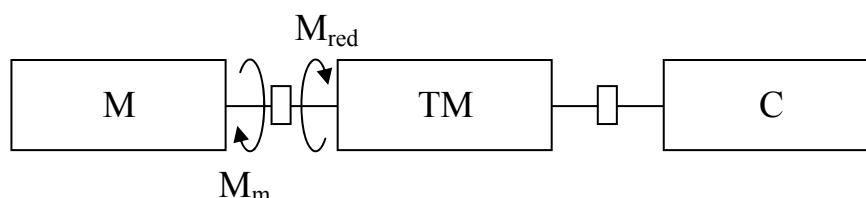
unde:  $\vec{a}_c$  este accelerația centrului de masă;

$\vec{a}_i'$  este accelerația centrului de masă  $m_i$  în mișcarea s-a relativă raportată la centrul de masă.



## 7.4 Modelul dinamic simplificat

Acest model **decuplează axele robotului**, luând în considerare numai o singură axă și neglijând influențele reciproce ale axelor dispozitivului de ghidare al robotului. Fiecare axă, fiecare modul, fiecare cuplă cinematică conducătoare se tratează separat ca și un sistem mecanic izolat compus dintr-un motor, o transmisie mecanică și un consumator.



**Fig. 7.4 Componenta unei axe a robotului**

Calculule se efectuează pentru cupla cinematică conducătoare „ $i, i+1$ ”. Se iau în considerare ca elemente mobile, elementele „ $i+1 \dots n$ ”. Lanțul cinematic „ $i+1 \dots n$ ”, conținând și efectorul final cu obiectul manipulat, se vor considera în poziția cea mai dezavantajoasă, când momentul rezistent redus  $M_{red}$  este maxim. Toate reducerile se fac la arborele motorului electric de acționare rotativ, sau la tija pistonului motorului pneumatic / hidraulic liniar.

### **a) Cupla cinematică conducătoare de rotație „ $i, i+1$ ”.**

Se impune ca la arborele motorului electric rotativ să se dezvolte o putere motoare capabilă să învingă puterea momentelor rezistente (gravitaționale, de frecare, de inerție și tehnologice).

$$P_m > P_{red} \quad \omega_m \cdot M_m > \omega_m \cdot M_{red} \quad \forall \quad \omega_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M_m > M_{red} \quad (7.79)$$

$$M_{red} = M_{red_g} + M_{red_{fr}} + M_{red_{in}} + M_{red_{tehn}}$$

unde:  $M_{red_g}$  - momentul rezistent redus al forțelor gravitaționale;

$M_{red_{fr}}$  - momentul rezistent redus al forțelor de frecare;

$M_{red_{in}}$  - momentul rezistent redus al forțelor de inerție;

$M_{red_{tehn}}$  - momentul rezistent redus al forțelor tehnologice, care se calculează numai dacă robotul este purtător al unei scule sau al unui cap de forță.

Momentul rezistent redus al forțelor gravitaționale al elementelor lanțului cinematic

„ $i+1 \dots n$ ” se determină din condiția echilibrării puterilor consumate în sistem de forțele de greutate:

$$\begin{aligned} P_{\text{red } g} &= M_{\text{red } g} \cdot \omega_m = \sum_{j=i+1}^n G_j \cdot V_{C_j} \cdot \cos \alpha_j \\ M_{\text{red } g} &= \frac{1}{\omega_m} \sum_{j=i+1}^n G_j \cdot V_{C_j} \cdot \cos \alpha_j \end{aligned} \quad (7.80)$$

unde:  $G_j$  – forța de greutate a elementului  $j$ ;

$V_{C_j}$  – viteza centrului de greutate al elementului  $j$ ;

$\alpha_j$  – unghiul de presiune.

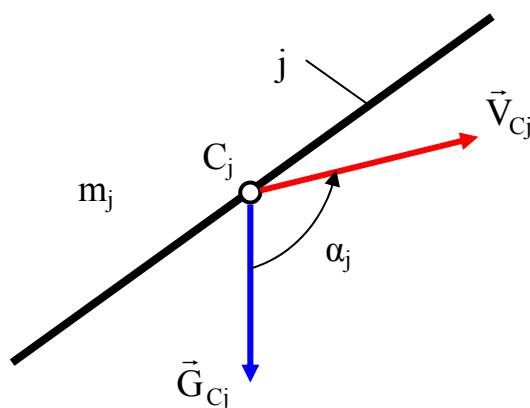


Fig. 7.5 Schema de calcul al  $M_{\text{red } g}$

Momentul rezistent redus al forțelor de frecare se determină din condiția compensării

puterilor disipate în sistem de forțele de frecare, care acționează în fiecare cuplă

cinematică a lanțului cinematic „ $i+1 \dots n$ ” (inclusiv în cuplele cinematice ale

transmisiei mecanice și ale motorului rotativ).

$$\begin{aligned} P_{\text{red } fr} &= M_{\text{red } fr} \cdot \omega_m = \sum_{j=i+1}^m F_{fr_j} \cdot V_j + \sum_{k=m+1}^n M_{fr_k} \cdot \omega_k \\ M_{\text{red } fr} &= \frac{1}{\omega_{ml}} \left( \sum_{j=i+1}^m F_{fr_j} \cdot V_j + \sum_{k=m+1}^n M_{fr_k} \cdot \omega_k \right) \end{aligned} \quad (7.81)$$

Momentul rezistent redus al forțelor de inerție al lanțului cinematic „ $i+1 \dots n$ ” se determină din relația:

$$M_{\text{red in}} = J_{\text{red}} \cdot \varepsilon_m \quad J_{\text{red}} = \frac{2 \sum_{j=i+1}^n E_{Cj}}{\omega_m^2} \quad (7.82)$$

unde:  $J_{\text{red}}$  - momentul de inerție masic redus se determină din condiția ca energia cinetică înmagazinată de întregul sistem să fie înmagazinată și de arborele motor (arborele de reducere).

$$\sum_{j=i+1}^n E_{Cj} = \sum_{j=i+1}^m \frac{1}{2} m_j \cdot V_{Cj}^2 + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2} J_{Ck} \cdot \omega_k^2 \quad (7.83)$$

unde:  $m_j$  – masa elementului  $j$  concentrată în centru de greutate  $C_j$  aflat în mișcare de translație cu viteza  $V_{Cj}$ ;

$J_{Ck}$  – momentul de inerție masic al elementului  $k$  în raport cu axa de rotație (luându-se în calcul și elementele transmisiei mecanice, inclusiv rotorul motorului electric) în mișcare de rotație cu viteza unghiulară  $\omega_k$ .

$$J_{\text{red}} = \frac{1}{\omega_m^2} \left( \sum_{j=i+1}^m m_j \cdot V_{Cj}^2 + \sum_{k=m+1}^n J_{Ck} \cdot \omega_k^2 \right) \quad (7.84)$$

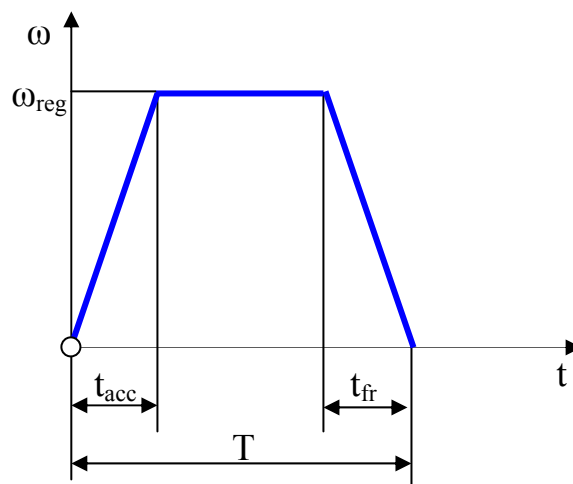


Fig. 7.6 Variația vitezei unghiulare

Accelerația unghiulară  $\varepsilon_m$  a arborelui motor pentru un profil trapezoidal al vitezei unghiulare  $\omega_m$  a arborelui motor se exprimă prin relația:

$$\varepsilon_m = \frac{\omega_m}{kT} \quad (7.85)$$

unde  $k < 1$  exprimă ponderea  $t_{acc}$ , respectiv  $t_{fr}$ , în timpul total, respectiv:

$$t_{acc} = t_{fr} = kT \quad (7.86)$$

$$T = \frac{\Psi_j}{(1 - 2k) \cdot \omega_{k \text{ reg}}} \quad (7.87)$$

unde:  $\Psi_j$  – cursa unghiulară a mișcării relative a elementului în mișcare de rotație.

### **b) Cupla cinematică conducătoare de translație „i, i+1”.**

Se impune la nivelul tijei motorului liniar să se dezvolte o putere motoare capabilă să învingă puterea forțelor rezistente (gravitaționale, de frecare, de inerție și tehnologice).

$$\begin{aligned} P_m > P_{red} \quad \omega_m \cdot F_m > \omega_m \cdot F_{red} \quad \forall \quad \omega_m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad F_m > F_{red} \\ F_{red} = F_{red \text{ g}} + F_{red \text{ fr}} + F_{red \text{ in}} + F_{red \text{ tehn}} \end{aligned} \quad (7.88)$$

unde:  $F_{red \text{ g}}$  - forța rezistentă redusă a forțelor gravitaționale;

$F_{red \text{ fr}}$  - forța rezistentă redusă a forțelor de frecare;

$F_{red \text{ in}}$  - forța rezistentă redusă a forțelor de inerție;

$F_{red \text{ tehn}}$  - forța rezistentă redusă a forțelor tehnologice, care se calculează

numai dacă robotul este purtător al unui cap de forță.

Forța rezistentă redusă a forțelor gravitaționale al elementelor lanțului cinematic „i+1 .. n” se

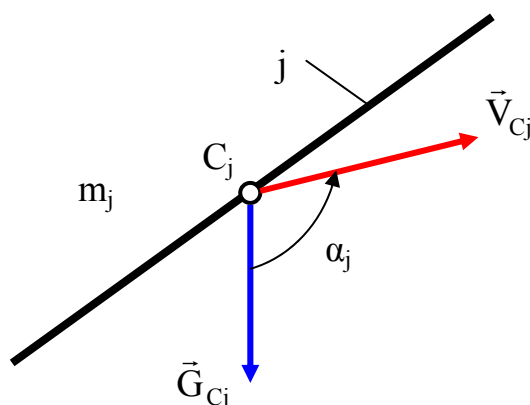
determină din condiția echilibrării puterilor consumate în sistem de forțele de greutate:

$$\begin{aligned} P_{red \text{ g}} = F_{red \text{ g}} \cdot V_m &= \sum_{j=i+1}^n G_j \cdot V_{Cj} \cdot \cos \alpha_j \\ F_{red \text{ g}} &= \frac{1}{V_m} \sum_{j=i+1}^n G_j \cdot V_{Cj} \cdot \cos \alpha_j \end{aligned} \quad (7.89)$$

unde:  $G_j$  – forța de greutate a elementului  $j$ ;

$V_{C_j}$  – viteza centrului de greutate al elementului  $j$ ;

$\alpha_j$  – unghiul de presiune.



**Fig. 7.7** Schema de calcul al  $F_{red\ g}$

Forța rezistentă redusă a forțelor de frecare se determină din condiția învingerii puterilor disipate în sistem de forțele de frecare, care acționează în fiecare cuplă cinematică a lanțului cinematic „ $i+1 \dots n$ ” (inclusiv în cuplurile cinematice ale transmisiei mecanice și ale motorului liniar).

$$P_{red\ fr} = F_{red\ fr} \cdot V_m = \sum_{j=i+1}^m F_{fr\ j} \cdot V_j + \sum_{k=m+1}^n M_{fr\ k} \cdot \omega_k \quad (7.90)$$

$$F_{red\ fr} = \frac{1}{V_{ml}} \left( \sum_{j=i+1}^m F_{fr\ j} \cdot V_j + \sum_{k=m+1}^n M_{fr\ k} \cdot \omega_k \right)$$

Forța rezistentă redusă a forțelor de inerție al lanțului cinematic „ $i+1 \dots n$ ” se determină din relația:

$$F_{red\ in} = m_{red} \cdot a_m \quad m_{red} = \frac{2 \sum_{j=i+1}^n E_{C_j}}{V_m^2} \quad (7.91)$$

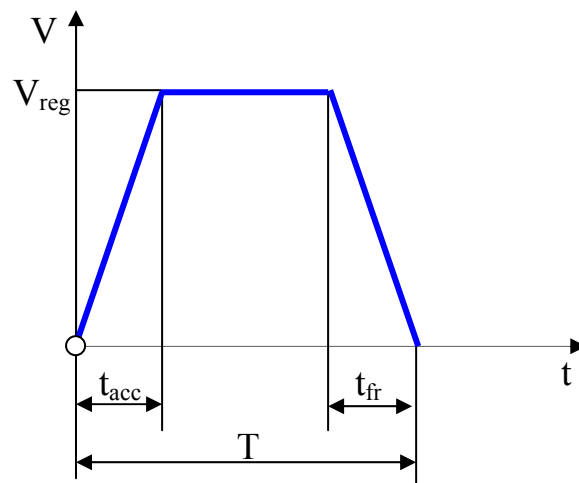
unde:  $m_{red}$  - masa redusă se determină din condiția ca energia cinetică înmagazinată de întregul sistem să fie înmagazinată și de tija motoare (arborele de reducere).

$$\sum_{j=i+1}^n E_{C_j} = \sum_{j=i+1}^m \frac{1}{2} m_j \cdot V_{C_j}^2 + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2} J_{C_k} \cdot \omega_k^2 \quad (7.92)$$

unde:  $m_j$  – masa elementului  $j$  concentrată în centru de greutate  $C_j$  aflat în mișcare de translație cu viteza  $V_{C_j}$ ;

$J_{C_k}$  – momentul de inerție masic al elementului  $k$  în raport cu axa de rotație, (luându-se în calcul și elementele transmisiei mecanice, inclusiv rotorul motorului electric) în mișcare de rotație cu viteza unghiulară  $\omega_k$ .

$$m_{\text{red}} = \frac{1}{V_m^2} \left( \sum_{j=i+1}^m m_j \cdot V_{C_j}^2 + \sum_{k=m+1}^n J_{C_k} \cdot \omega_k^2 \right) \quad (7.93)$$



**Fig. 7.8 Variația vitezei liniare**

Accelerația liniară  $a_m$  a tijeii motoare pentru un profil trapezoidal al vitezei liniare  $V_m$  a tijeii motoare se exprimă prin relația:

$$a_m = \frac{V_m}{kT} \quad (7.94)$$

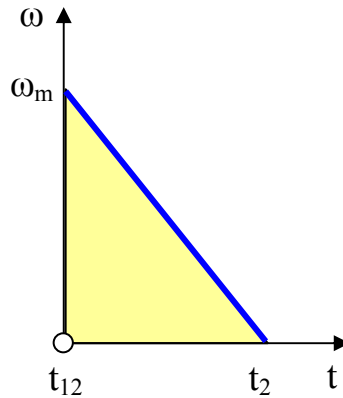
unde  $k < 1$  exprimă ponderea  $t_{\text{acc}}$ , respectiv  $t_{\text{fr}}$ , în timpul total, respectiv:

$$t_{\text{acc}} = t_{\text{fr}} = kT \quad (7.95)$$

$$T = \frac{h_j}{(1 - 2k) \cdot V_{j_{\text{reg}}}} \quad (7.96)$$

unde:  $h$  – cursa liniară a mișcării relative a elementului în mișcare de translație.

### c) Determinare momentului de frânare



**Fig. 7.9** Variația vitezei unghiulare la frânare

Pentru o cuplă cinematică conducătoare „ $i, i+1$ ” acționată de un motor rotativ, se pune condiția ca pe durata frânării viteza unghiulară să scadă la zero în momentul  $t_2$ .

Energia cinetică în momentul începerii frânării,  $t_{12}$  este:

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\text{red}} \cdot \omega_m^2 \quad (7.97)$$

sau

$$E_C = \int_{t_{12}}^{t_2} M_{\text{red}} \cdot d\varphi = M_{\text{red}} \int_{t_{12}}^{t_2} d\varphi \quad (7.98)$$

unde:

$$M_{\text{red}} = M_{\text{red}_g} + M_{\text{red}_{fr}} + M_{\text{red}_{tehn}} + M_{\text{fr}_{red}} \quad d\varphi = \omega_m dt \quad (7.99)$$

$$\int_{t_{12}}^{t_2} d\varphi = \int_{t_{12}}^{t_2} \omega_m dt = \frac{1}{2} \omega_m (t_2 - t_{12}) = \frac{1}{2} \omega_m \cdot k \cdot T \quad (7.100)$$

$$E_C = \frac{1}{2} M_{\text{red}} \cdot \omega_m \cdot k \cdot T \quad M_{\text{red}} = \frac{2E_C}{\omega_m \cdot k \cdot T} \quad (7.101)$$

$$M_{\text{fr}_{red}} = M_{\text{red}} - M_{\text{red}_g} - M_{\text{red}_{fr}} - M_{\text{red}_{tehn}} \quad (7.102)$$

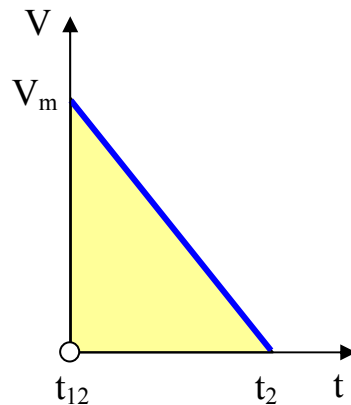
$$M_{\text{fr}_{red}} = \frac{2E_C}{\omega_m \cdot k \cdot T} - M_{\text{red}_g} - M_{\text{red}_{fr}} - M_{\text{red}_{tehn}} \quad (7.103)$$

Pentru alegerea frânei se calculează momentul sau forța de frânare care trebuie

dezvoltată. Pentru o cuplă cinematică conducătoare acționată de un motor rotativ:

$$M_{\text{fr}} = M_{\text{fr}_{red}} \frac{\omega_m}{\omega_{\text{fr}}} \quad F_{\text{fr}} = M_{\text{fr}_{red}} \frac{\omega_m}{V_{\text{fr}}} \quad (7.104)$$

### d) Determinare forței de frânare



**Fig. 7.10 Variația vitezei liniare la frânare**

Pentru o cuplă cinematică conducătoare „i, i+1” acționată de un motor liniar, se impune aceeași condiție ca pe durata frânării viteza motorului să scadă la zero în momentul  $t_2$ . Energia cinetică în momentul începerii frânării,  $t_{12}$  este:

$$E_C = \frac{1}{2} m_{\text{red}} \cdot V_m^2 \quad (7.105)$$

sau

$$E_C = \int_{t_{12}}^{t_2} F_{\text{red}} \cdot ds = F_{\text{red}} \int_{t_{12}}^{t_2} ds \quad (7.106)$$

unde:

$$F_{\text{red}} = F_{\text{red}_g} + F_{\text{red}_{fr}} + F_{\text{red}_{tehn}} + F_{fr_{red}} \quad ds = V_m dt \quad (7.107)$$

$$\int_{t_{12}}^{t_2} ds = \int_{t_{12}}^{t_2} V_m dt = \frac{1}{2} V_m (t_2 - t_{12}) = \frac{1}{2} V_m \cdot k \cdot T \quad (7.108)$$

$$E_C = \frac{1}{2} F_{\text{red}} \cdot V_m \cdot k \cdot T \quad F_{\text{red}} = \frac{2E_C}{V_m \cdot k \cdot T} \quad (7.109)$$

$$F_{fr_{red}} = F_{\text{red}} - F_{\text{red}_g} - F_{\text{red}_{fr}} - F_{\text{red}_{tehn}} \quad (7.110)$$

$$F_{fr_{red}} = \frac{2E_C}{V_m \cdot k \cdot T} - F_{\text{red}_g} - F_{\text{red}_{fr}} - F_{\text{red}_{tehn}} \quad (7.111)$$

Pentru alegerea frânei se calculează momentul sau forța de frânare care trebuie dezvoltată. Pentru o cuplă cinematică conducătoare acționată de un motor liniar:

$$M_{fr} = F_{fr_{red}} \frac{V_m}{\omega_{fr}} \quad F_{fr} = F_{fr_{red}} \frac{V_m}{V_{fr}} \quad (7.112)$$



## 8. COMANDA ȘI CONTROLUL ROBOȚILOR

### 8.1. Sarcina și funcțiile sistemului de comandă

#### 8.1.1. Structura robotului

Robotul se consideră ca un sistem de rangul  $R$ , compus din subsisteme de rang  $R-1$ .

Structura unui robot este prezentată în figura 8.1.

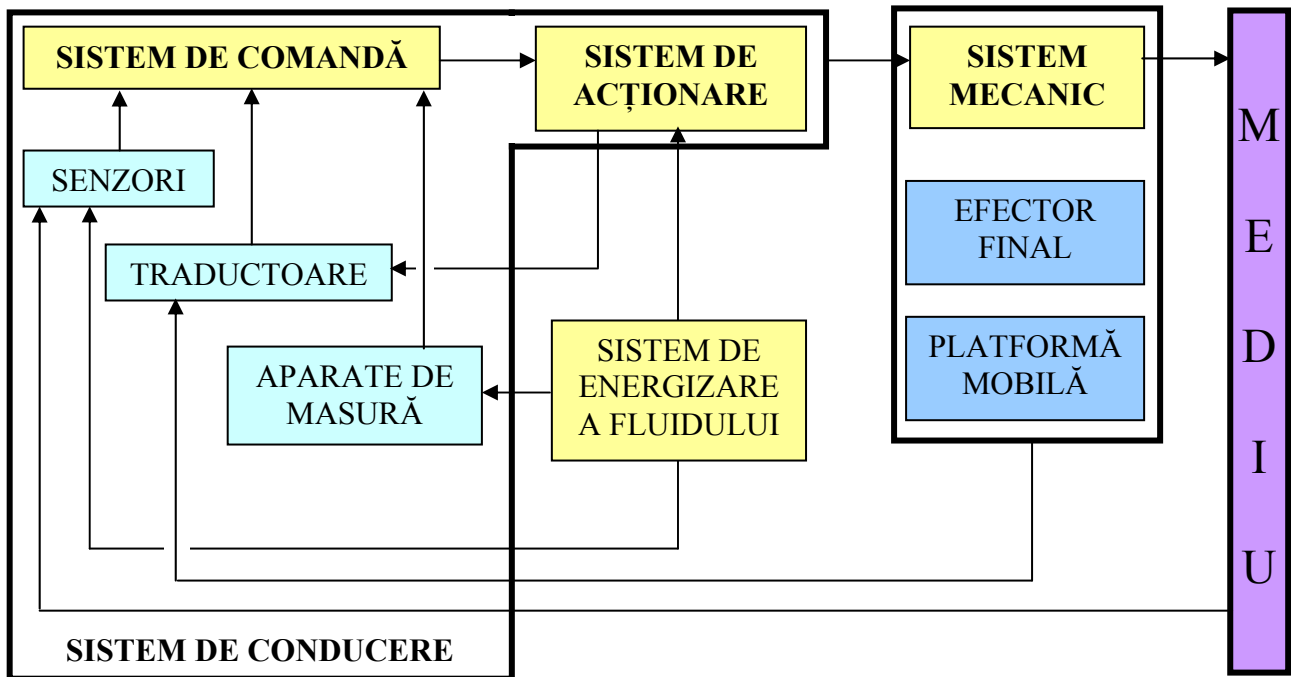


Fig. 8.1 Schema structurală a robotului

**Sistemul mecanic** este compus din mecanisme, care asigură mișcarea efectorului final în situațiile sale pe traiectoria programată. Platforma mobilă se regăsește numai în structura roboților mobili. Sistemul mecanic preia forțele generalizate ce acționează din mediu asupra robotului.

**Sistemul de acționare** impune mișcarea relativă a elementelor mecanismelor sistemului mecanic. Sistemul de acționare are ca și componente câte un element de acționare pentru fiecare cuplă cinematică conducătoare a mecanismelor sistemului mecanic.

Sistemul de energizare a fluidului se utilizează la roboți în cazul sistemelor de acționare hidraulice, respectiv pneumatice cu compresor propriu, deci a celor care folosesc ca purtător de energie un fluid.

Sistemul de comandă prelucrează informațiile despre starea mediului (externo - percepție) și despre starea interioară a robotului (proprio - percepție) și emite, în conformitate cu aceste informații și propriul program, comenzi către sistemul de acționare. Senzorii și traductoarele sunt elemente de inteligență artificială ce culeg informații (**senzori** culeg informații care nu sunt legate de deplasări – provenite din mediu –, iar **traductoarele** culeg informații legate de deplasări ale subsistemelor robotului. Sistemul de conducere al robotului, reunește sistemul de comandă, sistemul de acționare și elementele de inteligență artificială.

Sarcina principală a sistemului de comandă este de a transpune programele de aplicație în mișcări relative al elementelor cuplelor cinematice conducătoare ale dispozitivului de ghidare.

**Comanda mișcării** este prima sarcina a sistemului de comandă și constă în:

- a) coordonarea și supravegherea (controlul) mișcării efectorului final prin situațiile programate, sau a punctului caracteristic **M** pe traiectoriile programate;
- b) sincronizarea desfășurării mișcărilor robotului ce evenimentele care au loc la periferia robotului prin prelucrarea semnalelor externe preluate din procesul de producție (mașini unelte, dispozitive de lucru etc.)

- c) prelucrarea datelor de la senzorii externi (sisteme de prelucrarea imaginilor) și transpunerea rezultatelor prelucrate în reacțiile dorite.

Programele de aplicație arată într-o formă interpretabilă sarcinile pe care le are de executat robotul. Aceste programe au fost concepute „on-line” de către un programator, care de cele mai multe ori a folosit dispozitivul de ghidare și sistemul de comandă al robotului, în regim de instalație de teleoperare. De aceea se impune a doua sarcină a sistemului de comandă și anume **programarea robotului**. Prin programarea robotului se realizează în primul rând dialogul cu operatorul uman, căruia i se pun la dispoziție comenzile și funcțiile pentru conceperea, corectarea și testarea programului de mișcare, precum și dispozitivele de: introducere, scoatere și arhivare a programului.

Sarcinile sistemului de comandă sunt realizate de cele două componente ale sale:

- a) subsistemul hardware bazat pe microprocesor;
- b) subsistemul software.

În cazul sistemelor de comandă moderne are loc o conlucrare a celor două componente permițând:

- a) comanda manuală a robotului;
- b) comanda automată a robotului;
- c) comanda adaptivă a robotului;
- d) inițializarea robotului (aducerea lui în poziția de referință);
- e) programarea robotului, testarea și corectarea programelor.

## 8.2. Comanda mișcării robotului

Principala sarcină a unui robot este aceea de execuție automată a mișcărilor programate. Comanda mișcării robotului se realizează pe nivele ierarhice.

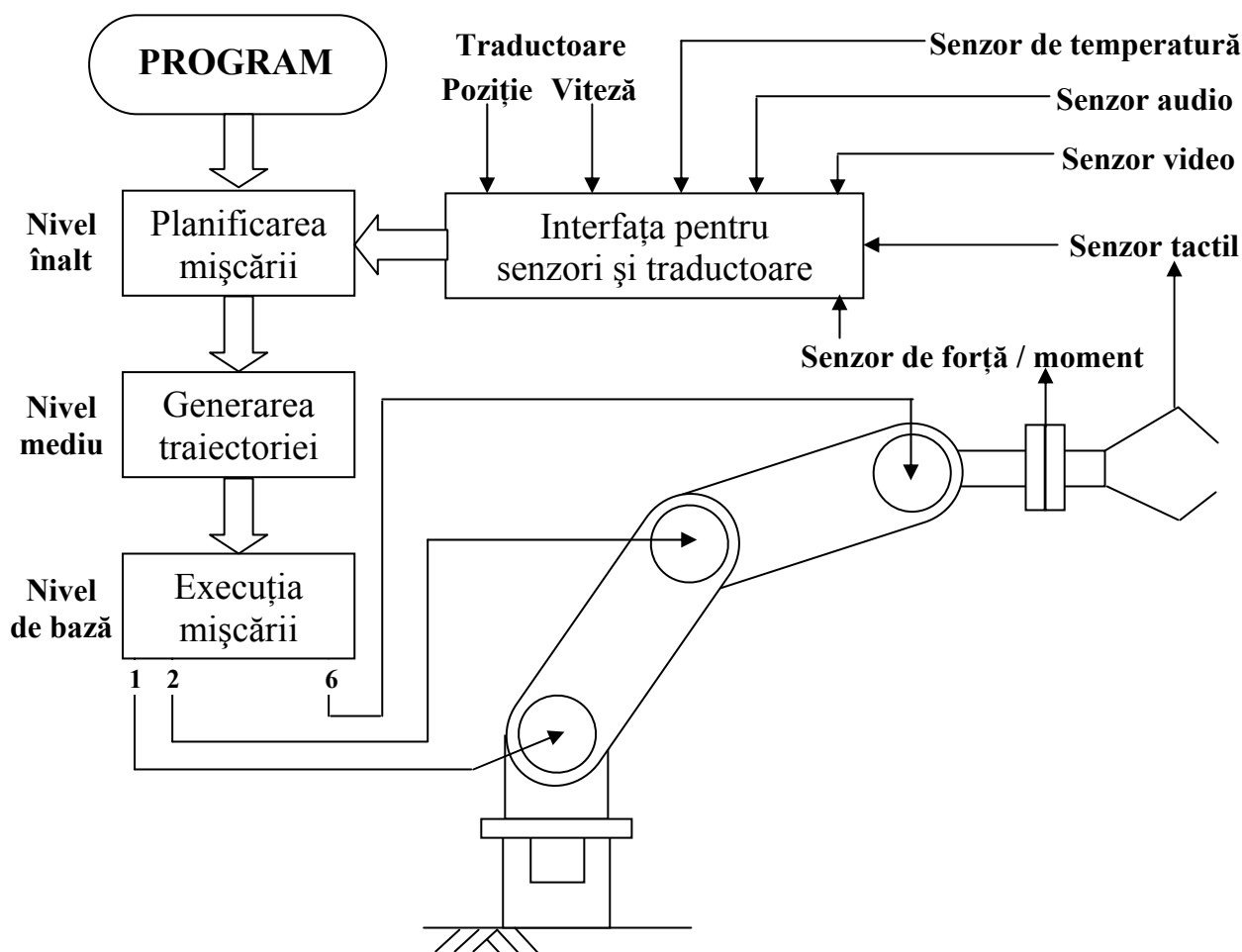


Fig. 8.2 Comanda mișcării robotului

Pe **nivelul înalt** se **planifică mișcarea** sistemului mecanic pe baza programului de aplicație și în acord cu informația senzorială și a traductoarelor. Pentru obținerea informațiilor din mediul de operare al robotului (externo – percepție) se folosesc senzori: tactili, de forță /moment, vizuali (camere video – CCD), auditivi (microfoane), de temperatură etc. Prin senzor se înțelege un dispozitiv care preia o anumită informație prin intermediul unui receptor, îl transformă într-un semnal , de

obicei electric, prin intermediul unui convertor și îl transmite mai departe sistemului de comandă, eventual amplificat și prelucrat.

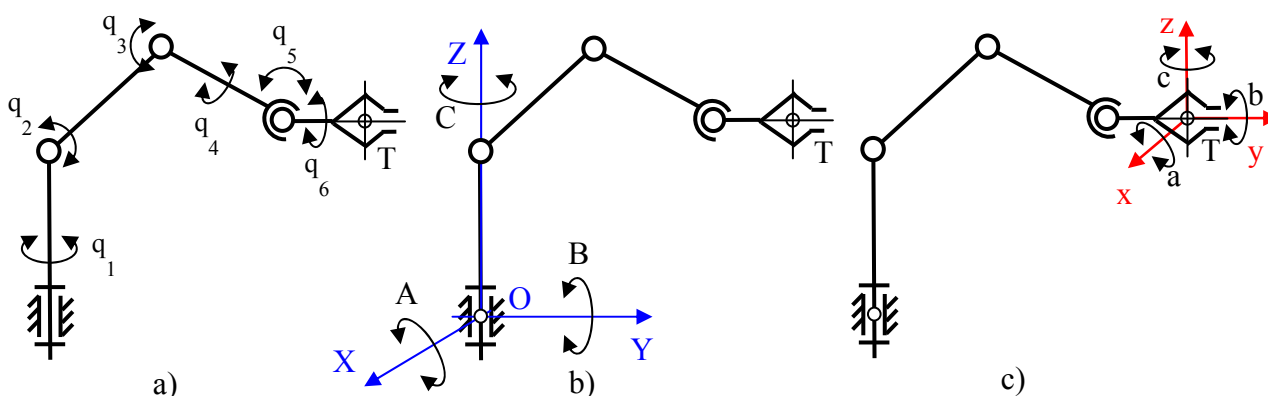
Pentru obținerea informațiilor despre stare internă a robotului (proprio – percepție) se folosesc traductoare care măsoară poziția și viteza generalizată, relativă a elementelor cuplelor cinematice conducătoare.

La **nivelul mediu** are loc **generarea traiectoriei**, adică se determină punctele de precizie prin care trece traiectoria punctului caracteristic între punctul START și punctul ȚINTĂ. Se realizează de asemenea o coordonare a mișcării axelor robotului (viteze și accelerații generalizată) astfel că aceste puncte să poată fi atinse.

La **nivelul de bază**, **execuția mișcării**, se controlează mișcarea relativă a elementelor fiecărei cuple cinematice conducătoare. Axele energetice aferente acestuia sunt controlate digital.

### 8.2.1. Transformări de coordonate

Descrierea unei mișcări complexe se poate realiza direct în coordonate generalizate (coordonate specifice robotului – joint coordinate), adică în variabilele cuplelor



**Fig. 8.3** Sisteme de coordonate a) coordonate generalizate (ROBOT);  
b) coordonate operaționale (carteziene atașate bazei robotului);  
c) coordonate operaționale (carteziene atașate efectului final)

cinematice conducătoare. Acest lucru este însă dificil de sesizat de către operatorul uman. De aceea situarea efectorului final în sistemul de coordonate operaționale atașat bazei robotului sau a efectorului final este mai ușor de sesizat de către operatorul uman, deoarece ambele sisteme sunt carteziene. În sistemul de coordonate atașat efectorului final, mișcările sunt relative deoarece originea T – tool point a sistemului de coordonate se modifică. Acest sistem este preferat în cazul operațiilor de montaj. Sistemele de comandă avansate dau posibilitatea utilizatorului, ca în faza de programare să poată alege între coordonatele generalizate și cele operaționale (având originea la baza robotului sau la efectorul final). Acest lucru simplifică conducerea manuală a robotului, operatorul putând utiliza taste de direcționare sau joystick – ul. Pentru a exprima aceleași mișcări în diferite sisteme de coordonate sunt necesare transformări de coordonate.

#### Transformarea directă de coordonate

Când punctele unei traiectorii sunt deja specificate în sistemul de coordonate generalizat (de exp. la programarea prin instruire), atunci se poate determina în mod univoc situarea efectorului final al robotului în sistemul de coordonate generalizat atașat bazei robotului. Aceasta se realizează prin matricea de transformare omogenă.

$$\vec{q} = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_6)^T \Rightarrow {}^R \underline{T}_{EF} = {}^0 \underline{T}_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1} \underline{T}_i \quad {}^R \underline{T}_{EF} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

#### Transformarea inversă de coordonate

Asigură trecerea de la sistemul de coordonate operațional cu originea la baza robotului, la cel de coordonate generalizate.

$$\begin{aligned}
{}^R \underline{T}_{EF} &\Rightarrow \vec{q} = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_6)^T & {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^0 \underline{T}_6 \\
{}^R \underline{T}_{EF} &= {}^0 \underline{T}_1 \cdot {}^1 \underline{T}_2 \cdot \dots \cdot {}^5 \underline{T}_6 \\
{}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^1 \underline{T}_2 \cdot {}^2 \underline{T}_3 \cdot \dots \cdot {}^5 \underline{T}_6 &\Rightarrow q_1 \\
{}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^2 \underline{T}_3 \cdot {}^3 \underline{T}_4 \cdot \dots \cdot {}^5 \underline{T}_6 &\Rightarrow q_2 \\
{}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^3 \underline{T}_4 \cdot {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 &\Rightarrow q_3 \\
{}^3 \underline{T}_4^{-1} \cdot {}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^4 \underline{T}_5 \cdot {}^5 \underline{T}_6 &\Rightarrow q_4 \\
{}^4 \underline{T}_5^{-1} \cdot {}^3 \underline{T}_4^{-1} \cdot {}^2 \underline{T}_3^{-1} \cdot {}^1 \underline{T}_2^{-1} \cdot {}^0 \underline{T}_1^{-1} \cdot {}^R \underline{T}_{EF} &= {}^5 \underline{T}_6 &\Rightarrow q_5, q_6
\end{aligned} \tag{8.2}$$

### 8.2.2. Comanda automată a roboților

Comanda automată trebuie să suplinească operatorul uman în prescrierea activității robotului. În acest scop se necesită: preluarea informațiilor privind sarcinile de executat de către robot de la operatorul uman sub formă de program, memorarea acestor sarcini, definirea mișcărilor pe care trebuie să le execute efectorul final, definirea mișcărilor relative ale cuplelor cinematice conducătoare ale dispozitivului de ghidare, recepționarea și interpretarea informațiilor primite privind mișcarea realizată.

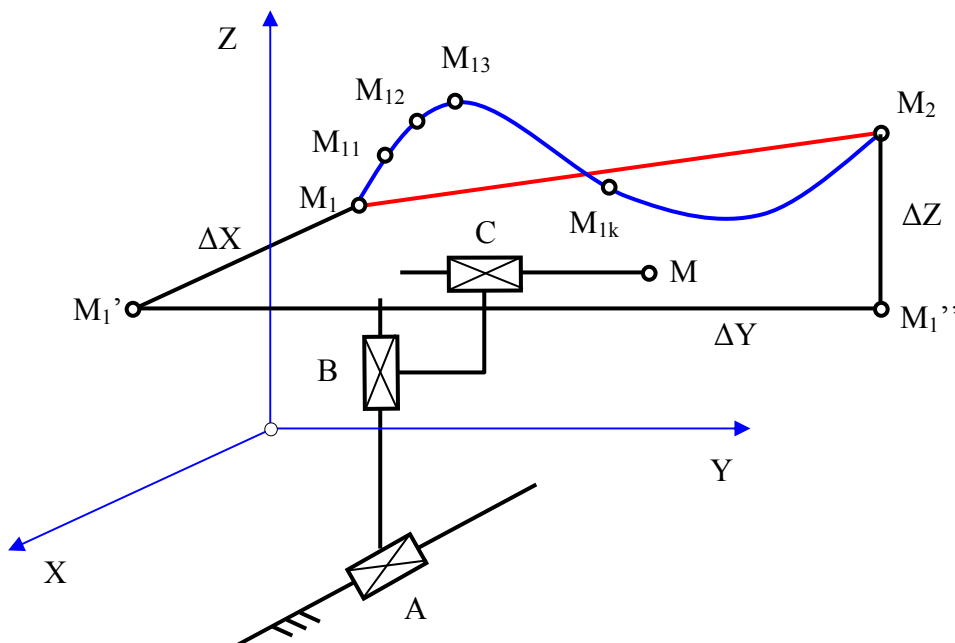


Fig. 8.4 Comanda automată a mișcării robotului

Funcția de comandă automată a robotului este realizată de sistemul de comandă automată a robotului compusă din: unitatea centrală de comandă și de procesare a informațiilor, dispozitivul de programare, dispozitivul de memorare a mișcărilor axelor, dispozitivul de intrare / ieșire. Comanda în regim automat a mișcării robotului, între punctele START și ȚINTĂ poate fi:

- a) Comanda secvențială** când mișcarea efectorului final se compune din atâtea secvențe câte cuple cinematice conducătoare contribuie la realizarea ei. Se acționează succesiv fiecare cuplă cinematică conducătoare. Traiectoria punctului caracteristic  $M$  este compusă din segmentele  $M_1M_1'$ ,  $M_1'M_1''$ ,  $M_1''M_2$ .
- b) Comanda punct cu punct PTP – Point To Point**, asincronă, sincronă și multipunct.
- b<sub>1</sub>) **comanda punct cu punct asincronă – PTP asincronă**, este cel mai vechi și cel mai simplu mod de comandă. El este folosit în aplicații de manipulare, paletizare și sudare în puncte. În acest caz se specifică doar distanța până la punctul țintă și profilul de viteză. Mișcările axelor nu sunt corelate, ele încep simultan și se termină pe rând. Traiectoria punctului caracteristic nu este definită.
- b<sub>2</sub>) **comanda punct cu punct sincronă – PTP sincronă**, îi este caracteristică faptul că toate axele își încep mișcarea și o termină în același timp. În acest caz se impune corelarea vitezelor elementelor cuplelor cinematice conducătoare. Și în acest caz traiectoria punctului caracteristic nu este definită.
- b<sub>3</sub>) **comanda multipunct – MP**, este tot o comandă de tip **PTP**, însă numărul punctelor impuse pe traiectorie este mult mai mare. La comanda **MP**, pe lângă condiția ca mișcarea relativă a celor 3 cuple cinematice conducătoare să înceapă



și să se termine în același moment, se impune și condiția ca în intervalul de timp  $t_{i+1} - t_i$  să se parcurgă cursele  $x_{i+1} - x_i$ ,  $y_{i+1} - y_i$  și  $z_{i+1} - z_i$ , între punctele de precizie  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  și  $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ . Aceste puncte de precizie sunt memorate automat, în procesul de instruire, la intervale de timp fixe, stabilite de sistemul de comandă. Și în acest caz traiectoria punctului caracteristic dintre două puncte de precizie nu este definită. Această comandă este folosită pentru roboți utilizați la sudarea în puncte sau la vopsire.

c) **Comanda de traiectorie continuă CP – Continuous Parth**, realizează deplasarea punctului caracteristic al efectorului final pe o traiectorie continuă impusă. Pentru aceasta toate axele trebuie comandate simultan. Semnalele de comandă pentru aceste axe sunt calculate de interpolatorul de mișcare, care este o componentă software a generatorului de traiectorie. Pentru generarea acestora se parcurg următoarele etape: interpolarea traiectoriei în sistemul de coordonate operațional atașat bazei robotului, sau al efectorului final, transformarea inversă de coordonate, interpolarea fină la nivelul axei de mișcare și reglarea situării elementelor fiecărei cuple cinematice conducătoare. Comanda pe traiectorie continuă se impune în cazul unor aplicații de sudare cu arc electric, tăiere cu jet de apă sau de laser, polizare și montaj. La comanda **CP** traiectoria punctului caracteristic între punctele **START** și **ȚINTĂ**, este aproximată prin intermediul unor curbe de interpolare (segmente de dreaptă, arce de cerc sau arce de parabolă), având ecuația:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

ceea ce impune corelarea mișcărilor relative ale cuplelor cinematice conducătoare.

Dacă la momentul  $t_j$  punctul caracteristic trebuie să fie în poziția  $M_j(x_j, y_j, z_j)$ ,

deplasările relative ale cuplelor cinematice conducătoare vor fi:

$$\begin{cases} \Delta x_{1j} = x_j - x_1 \\ \Delta y_{1j} = y_j - y_1 \\ \Delta z_{1j} = z_j - z_1 \end{cases} \quad (8.4)$$

Pentru deplasarea  $\Delta x_{1j}$  a cuplei cinematice conducătoare  $A$  rezultă:

$$\begin{cases} F(x_1 + \Delta x_{1j}, y_1 + \Delta y_{1j}, z_1 + \Delta z_{1j}) = 0 \\ \Phi(x_1 + \Delta x_{1j}, y_1 + \Delta y_{1j}, z_1 + \Delta z_{1j}) = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

sistem din care se obțin  $\Delta y_{1j}$  și  $\Delta z_{1j}$ .

### 8.2.3. Comanda manuală a roboților

Se realizează de către operatorul uman, rolul sistemului de comandă fiind preluat de către acesta, el fiind sau nu asistat de senzori / traductoare. Dacă operatorul uman se găsește la distanță de sistemul mecanic și de cel de acționare al robotului, comanda manuală este de teleoperare / telecomandă, iar roboții se numesc **instalații de teleoperare**.

Comanda manuală se poate realiza fie **direct** fie prin metoda **master – slave**.

#### a) Comanda manuală directă.

Este asemănătoare cu programarea „on line” prin instruire a unui robot comandat automat. Ea se realizează prin acționarea de către operatorul uman a unor butoane, întrerupătoare sau manete (joy – stick), care comandă direct motoarele de acționare ale cuple lor cinematice conducătoare. Toate butoanele, întrerupătoarele sau manetele se montează pe un panou, care constituie interfața om – mașină.

Transmiterea la distanță a comenzilor manuale se poate realiza prin:

⇒ cabluri / conducte de alimentare cu energie a motoarelor sistemului de acționare;

- ⇒ unde radio prin emițătoare / receptoare radio;
- ⇒ biocurenți prelevați de la operatorul uman cu deficiențe fizice în cazul protezelor sau ortezelor.

#### b) Comanda manuală copiere.

Comanda manuală directă este dificilă, deoarece supune operatorul uman la controlul simultan așii coordonate a unui număr mare de semnale și informații. Comanda manuală prin copiere constă în comandarea de către operatorul uman a unui lanț cinematic identic structural și proporțional geometric (coeficientul de proporționalitate fiind denumit „coeficient de sclav”). Lanțul cinematic comandat direct poartă denumirea de „lanț master”, iar robotul este un „lanț slave”. Instalațiile master-slave se mai numesc și „manipulatoare sincrone” deoarece lanțul master și slave se mișcă sincron.

#### c) Comanda mixtă a roboților.

Se realizează prin conlucrarea operatorului uman cu sistemul de comandă automat al robotului. De regulă operatorul uman apelează manual secvențele de program pe care sistemul de comandă automată al robotului o execută automat.

### 8.3. Programarea roboților

Flexibilitatea și productivitatea unui robot industrial este legată de faptul că sistemul său de comandă poate fi programat pentru realizarea optimă a unor sarcini diversificate.

Realizarea programului de comandă a unui robot presupune: programarea mișcărilor și programarea derulării comenzilor.

Programarea mișcărilor se referă la axele energetice componente. În cadrul ei se determină punctele traiectoriei de mișcare a punctului caracteristic, orientările aferente efectorului final și respectiv intervalele de mișcare.

Programarea derulării comenzilor se referă la stabilirea legăturii dintre intervalele de mișcare, determinarea parametrilor de proces ca: timpi, viteze și accelerații generalizate, prelucrarea datelor de proces, precum și comunicația cu periferia sistemului robot.

Programarea robotului poate fi „on – line” (programare apropiată de robot) și „off – line” (programare îndepărtată de robot).

Programarea „on – line” este cea mai răspândită. Programarea mișcării se face prin **instruire**, programatorul realizând mișcările prin conducerea manuală a robotului, sau a unui model în regim de instalație de teleoperare, în timp ce sistemul de comandă al robotului înregistrează în memorie datele de mișcare. În continuare operatorul uman prin comenzi alfanumerice sau taste funcționale programează derularea programului.

Programarea „off – line” – programatorul prestabilește valorile numerice ale parametrilor mișcării pe un calculator aflat la distanță față de robot. Modul de realizare a programării mișcării: Playback și Teach-in.

Programarea Playback – Efectorul final străbate întreaga succesiune de situații programate, iar înregistrarea situațiilor de pe traiectorie este independentă de programator, fiind realizată de sistemul de comandă cu un tact prestabilit. Comanda în regim automat a unui robot la care s-a folosit programarea Playback se face în modul **multipunct MP**. Dezavantajul constă în capacitatea de memorie mare pentru a stoca informațiile privind succesiunea de situații.

Programarea Teach – in – programatorul conduce efectorul final spre situațiile marcate ale succesiunii de situații programate, care apoi este înregistrată în memoria calculatorului.

Parametrii de mișcare ca: viteza, accelerația, precizia de atingerea a unui punct și tipul interpolării între două situații memorate, sunt introduși de programator în **faza de editare a**

**programului**. După editare urmează **faza de compilare**, în care programul editat este transformat într-un cod binar, perceput de sistemul de comandă. Tot în această fază se corectează eventualele erori din faza de editare.

Înregistrarea situațiilor succesive ale efectorului final se poate face prin:

a) conducerea directă a robotului, când după decuplarea frânelor, operatorul uman acționează manual robotul cu ajutorul unui mâner plasat pe efectorul final.

Aplicația este frecventă la operațiile de vopsire.

b) conducerea unui model cinematic, când programatorul se folosește de un lanț cinematic asemănător din punct de vedere cinematic cu dispozitivul de ghidare al robotului.

c) conducerea master - slave, când se manipulează sarcini foarte mari, iar mișcarea robotului se realizează cu propriul sistem de acționare. Pentru aceasta se utilizează un lanț cinematic de conducere a robotului. Mișcările robotului se realizează sincron cu ale lanțului cinematic, manevrat de operatorul uman, având o instalație master – slave.

d) conducerea prin panou de învățare, comanda mișcării robotului și înregistrarea în memorie a situațiilor succesive se face cu panouri mobile cu taste de direcție și joystick-uri. Acționarea unei taste de direcție comandă robotul să se deplaseze în concordanță cu semnificația tastei și a sistemului de coordonate ales. Sistemele de comandă moderne permit transformări de coordonate (directe sau inverse) în timp real, permițând alegerea de către operator a sistemului de coordonate.

## 9. SINTEZA FUNCȚIILOR DE CONDUCERE A ROBOȚILOR

Mișcarea efectorului final se realizează în spațiul cartezian 3D. Pozițiile punctului caracteristic respectiv orientarea dreptei caracteristice și dreptei auxiliare se definesc în conformitate cu matricea de situare în raport cu sistemul de referință fix atașat bazei robotului. Definirea mișcării relative a elementelor cuplelor cinematice conducătoare se realizează prin calcul, de către sistemul de comandă al robotului.

Legile de variație în funcție de timp al deplasărilor și vitezele generalizate relative ale elementelor cuplelor cinematice conducătoare se numesc **legi de mișcare**. Cele mai des utilizate legi de mișcare sunt cele cu „**profil de viteză**”, „**polinomiale**” și „**polinomiale cu racordări**”.

Sistemul de comandă calculează la intervale de timp prescrise, în funcție de situările efectorului final (coordonatele sale în spațiul cartezian), și legea de mișcare adoptată, în funcție de poziția și viteza relativă generalizată ale elementelor cuplelor cinematice conducătoare (coordonatele sale în spațiul cuplelor cinematice conducătoare), operația numindu-se transformări de coordonate.

În cazul comenzii pe traiectorie continuă, sistemul de comandă calculează vitezele generalizate ale mișcărilor relative ale elementelor cuplelor cinematice conducătoare în momentele aferente timpului de eșantionare prin intermediul modelului cinematic invers al dispozitivului de ghidare al robotului.

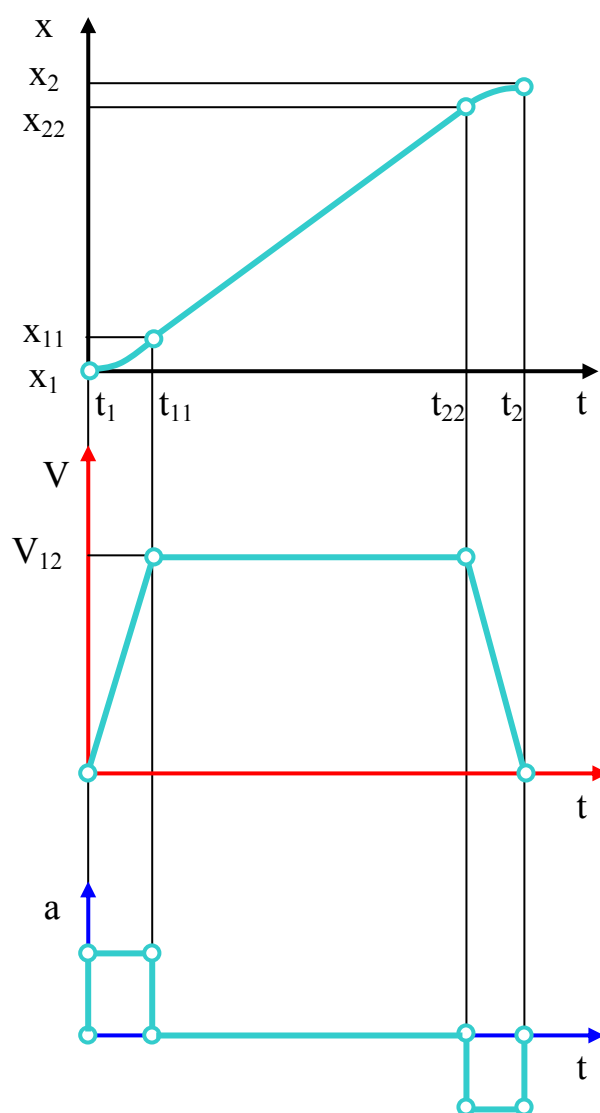
### 9.1. Funcția de conducere

Funcția de conducere a axelor de robot este o îmbinare a **funcției de comandă** și **funcția de acționare** a axelor robotului. Conținutul **funcției de conducere** este:

recepționarea semnalelor emise de sistemul de comandă privind variația în timp a parametrilor mișcărilor relative ale elementelor cuplelor cinematice conducătoare, comanda funcționării motoarelor de acționare pentru realizarea parametrilor amintiți, controlul realizării lor și corelarea funcționării motoarelor.

## 9.2. Legi de mișcare ale cuplelor cinematice conducătoare

### 9.2.1. Legi de mișcare parabolică (cu profil de viteză trapezoidal)



**Fig. 9.1** Legea de mișcare cu profil de viteză trapezoidal

Legile de mișcare cu profil de viteză trapezoidal,  $v = ct$ , au dezavantajul unor șocuri puternice în funcționare, ca efect al forței de inerție rezultante.

Pentru condițiile inițiale:

$$a_1 = |a_2| = a \quad t_{11} - t_1 = t_2 - t_{22} = kt_2 \quad (9.1)$$

$$x_{11} = \frac{1}{2}a_1 \cdot (t_{11} - t_1)^2 = x_{11} = \frac{1}{2}a \cdot k^2 t_2^2$$

$$x_{22} = V_{12}(t_{22} - t_{11}) = V_{12}(1 - 2k)t_2$$

$$(t_{22} - t_{11}) = t_2 - (t_{11} - t_1) - (t_2 - t_{22}) = (1 - 2k)t_2$$

$$x_2 = V_{12}(t_2 - t_{22}) - \frac{1}{2}a_2 \cdot (t_2 - t_{22})^2 = V_{12}kt_2 - \frac{1}{2}a \cdot k^2 t_2^2 \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_{11} + x_{22} + x_2 = \frac{1}{2}a \cdot k^2 t_2^2 + V_{12}(1 - 2k)t_2 + V_{12}kt_2 - \frac{1}{2}a \cdot k^2 t_2^2 = \\ &= V_{12}(1 - k)t_2 \end{aligned}$$

$$k_{\text{opt}} = 1 - \frac{x_{12}}{V_{12}t_2} = 1 - \frac{x_{12}}{V_{\text{max}}t_2}$$

Se obține  $a_{\text{max}}$  din expresia:

$$\begin{aligned} a_{\text{max}} &= \frac{2x_{11}}{k_{\text{opt}}^2 t_2^2} \quad x_{11} = x_2 = \frac{x_{12} - x_{22}}{2} = \frac{x_{12} - V_{\text{max}}(1 - 2k_{\text{opt}})t_2}{2} \\ a_{\text{max}} &= \frac{x_{12} - V_{\text{max}}(1 - 2k_{\text{opt}})t_2}{k_{\text{opt}}^2 t_2^2} \end{aligned} \quad (9.3)$$

### 9.2.2. Principiile legilor de mișcare polinomiale

Un polinom de rangul  $n$  și primele doua derivate ale sale au expresiile:

$$\begin{aligned} F(t) &= C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1} + C_n t^n \\ F'(t) &= C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 \dots + (n-1)C_{n-1} t^{n-2} + nC_n t^{n-1} \\ F''(t) &= 2C_2 + 6C_3 t^2 \dots + (n-2)(n-1)C_{n-1} t^{n-3} + n(n-1)C_n t^{n-2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Pentru trasarea legii de mișcare de ordinul zero se impun  $N$  perechi de valori, unde  $N$

– numărul coeficienților polinomiale are expresia:  $N=n+1$ . Pentru a se evita șocurile

în funcționare se impune ca la capetele de cursă să avem  $V = 0$  și  $a = 0$  adică:

$$\begin{aligned} \forall t = t_1 = 0 \quad F(t_1) = C_0 = 0 \quad F'(t_1) = C_1 = 0 \quad F''(t_1) = 2C_2 = 0 \\ \forall t = t_2 \quad F(t_2) = x_{12} \quad F'(t_2) = 0 \quad F''(t_2) = 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$



Pentru  $N = 6$  condiții inițiale impuse rezulta  $n = 5$  gradul poligonului, adică:

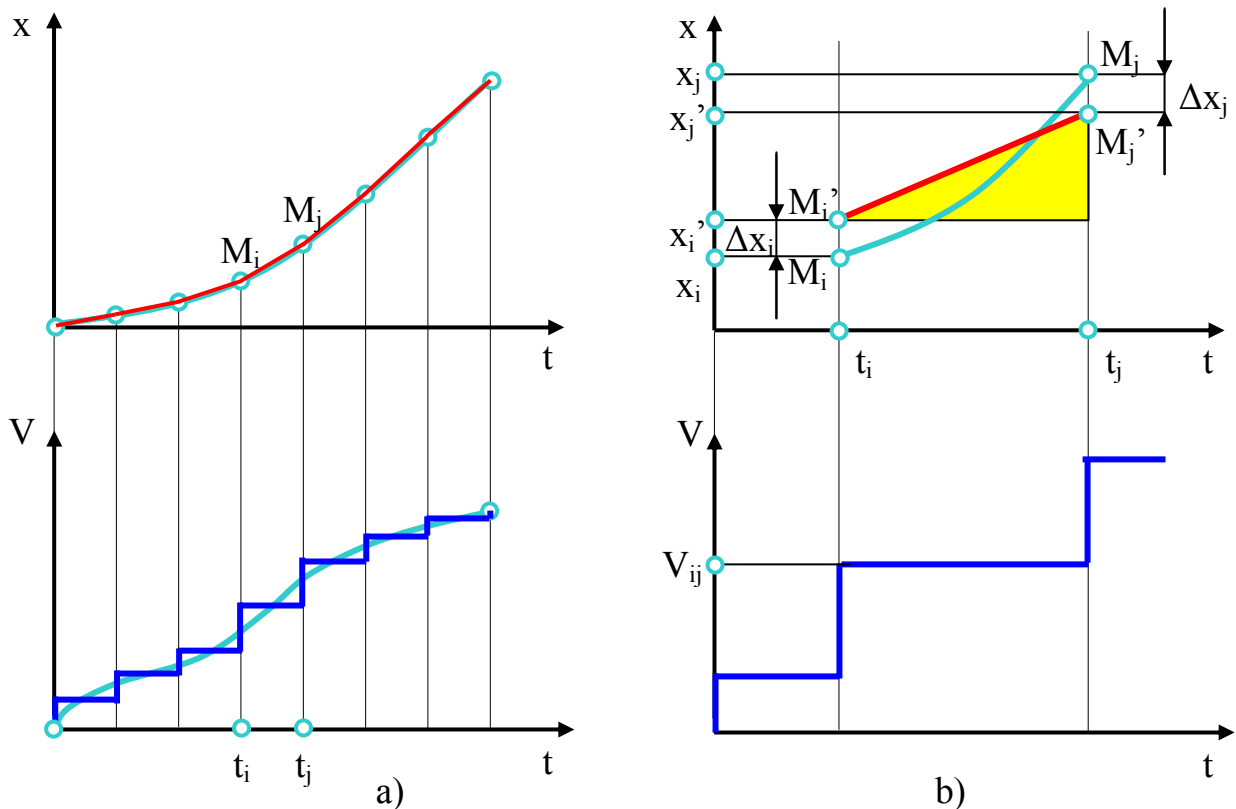
$$F(t) = C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 \quad (9.6)$$

Din a doua condiție pusă în relațiile (9.6) se obține sistemul de 3 ecuații cu 3 necunoscute:

$$\begin{cases} F(t_2) = C_3 t_2^3 + C_4 t_2^4 + C_5 t_2^5 = x_{12} & C_3 = 10 \frac{x_{12}}{t_2^3} \\ F'(t_2) = 3C_3 t_2^2 + 4C_4 t_2^3 + 5C_5 t_2^4 = 0 & \Rightarrow C_4 = -15 \frac{x_{12}}{t_2^4} \\ F''(t_2) = 6C_3 t_2 + 12C_4 t_2^2 + 20C_5 t_2^3 = 0 & C_5 = 6 \frac{x_{12}}{t_2^5} \end{cases} \quad (9.7)$$

Rezolvând sistemul (9.7) expresia generală a legii de mișcare polinomială ce răspunde la condițiile inițiale impuse este:

$$F(t) = -10x_{12} \left( \frac{t}{t_2} \right)^3 - 15x_{12} \left( \frac{t}{t_2} \right)^4 + 6x_{12} \left( \frac{t}{t_2} \right)^5 \quad (9.8)$$



**Fig. 9.2** Legea de mișcare cu profil de viteză o funcție polinomială – a) și aproximarea cu segmente de dreaptă – b)

În cazul în care profilul vitezei nu este trapezoidal, ci o funcție polinomială sau o funcție trigonometrică, ea se poate aproxima cu segmente de dreaptă. Cea mai bună aproximare se obține dacă:

$$\begin{aligned} \Delta x_i = \Delta x_j = \Delta x \quad x'_i = x_i + \Delta x \quad x'_j = x_j - \Delta x \quad x'_i - x_i = x_j - x'_j = \Delta x \\ F(t_i) = C_0 + C_1 t_i + C_2 t_i^2 + \dots + C_{n-1} t_i^{n-1} + C_n t_i^n = x_i \\ F(t_j) = C_0 + C_1 t_j + C_2 t_j^2 + \dots + C_{n-1} t_j^{n-1} + C_n t_j^n = x_j \end{aligned} \quad (9.9a)$$

$$\begin{aligned} V_{ij} = \frac{x'_j - x'_i}{t_j - t_i} \quad x'_j - x'_i = x_j - x_i - 2\Delta x \quad \Rightarrow \quad V_{ij} = \frac{x_j - x_i - 2\Delta x}{t_j - t_i} \\ V_{ij} = \frac{-2\Delta x}{t_j - t_i} + C_1 + C_2(t_j + t_i) + C_3 \frac{t_j^3 - t_i^3}{t_j - t_i} + \dots + C_n \frac{t_j^n - t_i^n}{t_j - t_i} \end{aligned} \quad (9.9b)$$

### 9.2.3. Legi de mișcare polinomiale cu racordări

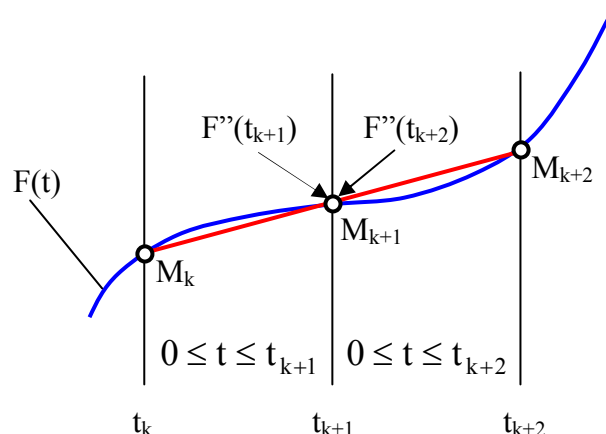
Pentru a exprima o traiectorie descrisă în coordonate carteziene sunt necesare **M** funcții de aproximare, câte una pentru fiecare grad de mobilitate al robotului, iar aceste funcții se calculează pentru fiecare punct de precizie impus pe traiectorie. Ținând cont că fiecare punct de precizie reclamă trei condiții inițiale (poziție, viteză și accelerație) gradul funcției polinomiale ce trece prin **k** puncte de precizie este  **$n = 3k-1$** .

Metoda Ho și Cook utilizează aproximarea traiectoriei polinomiale prin segmente de curbă, utilizând funcții polinomiale de gradul 3 pentru segmentele intermediare și de gradul 4 pentru segmentele de început și de sfârșit. Pentru a trasa o traiectorie prin **n** puncte sunt necesare **n-1** funcții polinomiale de aproximare: **2 funcții de gradul 4**, pentru începutul și sfârșitul traiectoriei și **n-3 funcții de gradul 3** pentru segmentele intermediare.

a) Pentru două puncte de precizie intermediare ale traiectoriei,  $M_k$  și  $M_{k+1}$

( $2 \leq k \leq n-1$ ), funcția polinomială de gradul trei pe segmentul  $M_k M_{k+1}$  scrisă pentru o singură cuplă cinematică conducătoare:

$$F(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 \quad t \in [t_k = 0, t_{k+1}] \quad (9.10)$$



**Fig. 9.3** Aproximarea între două puncte de precizie ale traiectoriei

Pentru intervalul de timp  $t \in [t_k = 0, t_{k+1}]$  se impun următoarele condiții inițiale:

$$F(0) = F_k \quad F(t_{k+1}) = F_{k+1} \quad F'(0) = F'_k \quad F'(t_{k+1}) = F'_{k+1} \quad (9.11)$$

unde  $F_k$  și  $F_{k+1}$  reprezintă poziția în planul mișcării, al punctelor  $M_k$  și  $M_{k+1}$  la momentele  $t_k=0$  și  $t_{k+1}$ , iar  $F'_k$  și  $F'_{k+1}$  reprezintă vitezele cuplei cinematice conducătoare în aceleași puncte și aceleași momente.

Derivând relația (9.10) se obține expresia legii de mișcare de ordinul unu.

$$F'(t) = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 \quad (9.12)$$

Înlocuind condițiile inițiale din relația (9.11) în relațiile (9.10) și (9.12) se obține:

$$F(0) = F_k = C_0 \quad F'(0) = F'_k = C_1 \quad (9.13)$$

$$\begin{cases} F(t_{k+1}) = F_{k+1} = F_k + F'_k t_{k+1} + C_2 t_{k+1}^2 + C_3 t_{k+1}^3 \\ F'(t_{k+1}) = F'_{k+1} = F'_k + 2C_2 t_{k+1} + 3C_3 t_{k+1}^2 \end{cases} \quad (9.14)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (9.14) se obține pe intervalul de timp  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{t_{k+1}} \left[ \frac{3(F_{k+1} - F_k)}{t_{k+1}} - 2F'_k - F'_{k+1} \right] \\ C_3 &= \frac{1}{t_{k+1}^2} \left[ \frac{2(F_k - F_{k+1})}{t_{k+1}} + F'_k + F'_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (9.15)$$

Pentru valori particulare  $2 \leq k \leq n - 1$  relațiile (9.13) și (9.15) se pot grupa matriceal:

$$\begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ \frac{2}{t_{k+1}^2} & \frac{-2}{t_{k+1}^2} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{-2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F'_k \\ F'_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

Se vor selecta valorile lui  $t_{k+1}$  pentru care punctul  $M_{k+1}$  asigura o eroare de traiectorie minimă:

$$t_{k+1} \quad \forall \quad \Phi = \left[ \sum_{i=1}^M |q_{i,k+1} - q_{i,k}|^2 \right] = \text{min im} \quad (9.17)$$

$q_{i,k+1}$  este coordonata generalizată obținută prin acționarea cuplei cinematice conducătoare pentru a atinge punctul  $M_{k+1}$ .

Vitezele  $F'_k$  și  $F'_{k+1}$  se determină din condițiile de continuitate a legii de mișcare de ordinul doi (a accelerațiilor) în punctele de precizie. Prin derivarea expresiei vitezei din relația (9.11) se obține accelerația la sfârșitul primului segment în punctul de precizie  $M_{k+1}$ :

$$F''(t_{k+1}) = 2C_2 + 6C_3 t_{k+1} \quad (9.18)$$

Pentru începutul celui de-al doilea segment expresia accelerației devine:

$$F''(t_{k+2}) = 2C_2 + 6C_3 t_{k+2} \quad (9.19)$$

$$\text{Particularizând la } t=0 \quad \Rightarrow \quad F''(0) = 2C_2 \quad (9.20)$$

Continuitatea legii de mișcare de gradul doi (în accelerație constantă) în punctul  $M_{k+1}$ :

$$F''(t_{k+1}) = F''(t_{k+2}) \quad (9.21)$$

Utilizând expresiile (9.16), (9.18) și (9.20) în relația (9.21) se obține:

$$t_{k+2}F'_k + 2(t_{k+1} + t_{k+2})F'_{k+1} + t_{k+1}F'_{k+2} = \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}} \left[ t_{k+1}^2(F_{k+2} - F_{k+1}) + t_{k+2}^2(F_{k+1} - F_k) \right] \quad (9.22)$$

Pentru valori particulare  $2 \leq k \leq n-1$  relația (9.22) se poate grupa matriceal:

$$\begin{bmatrix} t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_6 & 2(t_5 + t_6) & t_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{n-1} & 2(t_{n-2} + t_{n-1}) & t_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \\ \vdots \\ F'_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{t_3 t_4} [t_3^2(F_4 - F_3) + t_4^2(F_3 - F_2)] \\ \frac{3}{t_4 t_5} [t_4^2(F_5 - F_4) + t_5^2(F_4 - F_3)] \\ \frac{3}{t_5 t_6} [t_5^2(F_6 - F_5) + t_6^2(F_5 - F_4)] \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-2} t_{n-1}} [t_{n-2}^2(F_{n-1} - F_{n-2}) + t_{n-1}^2(F_{n-2} - F_{n-3})] \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

Rezolvând sistemul matriceal (9.23) se obțin valorile matricei vitezelor  $[F']$  și

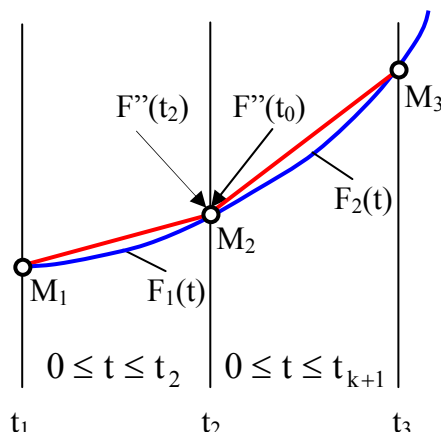
înlocuind în matricea (9.16) rezultă o soluție unică a coeficienților polinomiali pentru fiecare funcție polinomială de ordinul trei. Pe măsură ce se obțin soluțiile funcțiilor polinomiale - relația (9.10) - se impune verificarea respectării condiției de eroare minimă față de traiectoria programată.

**b) Pentru primul și ultimul segment al traiectoriei** se impune condiția inițială de

funcționare fără șocuri:  $F'_1 = F''_1 = F'_n = F''_n = 0 \quad (9.24)$

utilizând funcția polinomială de gradul patru:

$$F(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 \quad (9.25)$$



**Fig. 9.4** Aproximarea primului segment al traiectoriei

⇒ pentru segmentul inițial  $\overline{M_1 M_2}$  pe intervalul de timp  $t \in [t_1 = 0, t_2]$  se

impun următoarele condiții inițiale:

$$F(0) = C_0 = F_1 \quad F'(0) = C_1 = 0 \quad F''(0) = C_2 = 0 \quad (9.26)$$

$$\begin{cases} F(t_2) = F_1 + C_3 t_2^3 + C_4 t_2^4 = F_2 \\ F'(t_2) = 3C_3 t_2^2 + 4C_4 t_2^3 = F'_2 \\ F''(t_2) = 6C_3 t_2 + 12C_4 t_2^2 = F''_2 \end{cases} \quad (9.27)$$

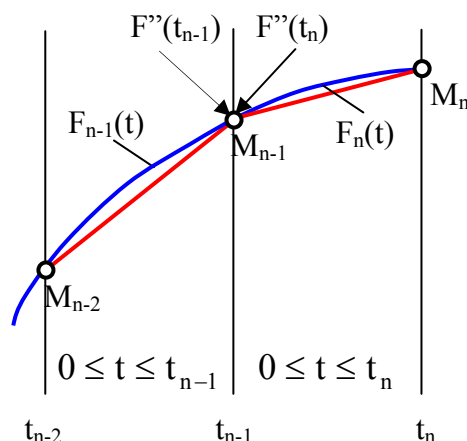
Rezolvând primele 2 ecuații din sistemul de ecuații (9.27) se obține:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{4}{t_2^3}(F_2 - F_1) - \frac{1}{t_2^2} F'_2 \\ C_4 &= \frac{-3}{t_2^4}(F_2 - F_1) + \frac{1}{t_2^3} F'_2 \end{aligned} \quad (9.28)$$

⇒ pentru segmentul final  $\overline{M_{n-1} M_n}$  pe intervalul de timp  $t \in [t_{n-1} = 0, t_n]$  se

impun următoarele condiții inițiale:

$$F(0) = C_0 = F_{n-1} \quad F'(0) = C_1 = F'_{n-1} \quad (9.29)$$



**Fig. 9.5 Aproximarea ultimului segment al traiectoriei**

$$\begin{cases} F(t_n) = F_{n-1} + F'_{n-1}t_n + C_2t_n^2 + C_3t_n^3 + C_4t_n^4 = F_n \\ F'(t_n) = F'_{n-1} + 2C_2t_n + 3C_3t_n^2 + 4C_4t_n^3 = 0 \\ F''(t_n) = 2C_2 + 6C_3t_n + 12C_4t_n^2 = 0 \end{cases} \quad (9.30)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (9.30) se obține:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{t_n^2} (6F_n - 6F_{n-1} - 3F'_{n-1}t_n) \\ C_3 &= \frac{1}{t_n^3} (-8F_n + 8F_{n-1} + 3F'_{n-1}t_n) \\ C_4 &= \frac{1}{t_n^4} (3F_n - 3F_{n-1} - F'_{n-1}t_n) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Pentru determinarea matricei vitezelor  $[F']$  se impune condiția de continuitate a legii de mișcare de ordinul doi (a accelerațiilor) în punctele de precizie  $M_2$  pentru primul segment al traiectoriei și  $M_{n-1}$  pentru ultimul al traiectoriei.

Accelerația la sfârșitul primului segment de curbă, în punctul de precizie  $M_2$  se exprimă prin derivata a doua a funcției polinomiale de gradul patru - vezi relația (9.25):

$$F''(t_2) = 6C_3t_2 + 12C_4t_2^2 \quad (9.32)$$

care cu ajutorul relațiilor (9.31) ia forma:

$$F''(t_2) = \frac{-12}{t_2^2}(F_2 - F_1) + \frac{6}{t_2}F_2' \quad (9.33)$$

La începutul primului segment de curbă intermediară, derivata de ordinul doi a funcției polinomiale de ordinul trei se obține cu ajutorul relației (9.12):

$$F''(t) = 2C_2 + 6C_3t \quad (9.34)$$

Particularizând la  $t=0$ , corespunzător punctului de precizie  $M_2$  de început al primului segment de curba intermediar:  $\Rightarrow F''(0) = 2C_2$  (9.35)

unde coeficientul  $C_2$  este definit de relația (9.15) pentru  $k = 2$ :

$$F''(0) = \frac{2}{t_3} \left[ \frac{3(F_3 - F_2)}{t_3} - 2F_2' - F_3' \right] \quad (9.36)$$

Continuitatea legii de mișcare de gradul doi (în accelerație constantă) în punctul  $M_2$ , se exprimă prin egalarea relațiilor (9.33) și (9.36):

$$F''(t_2) = F''(t_k = 0) \quad (9.37)$$

$$\left( \frac{2}{t_3} + \frac{3}{t_2} \right) F_2' + \frac{1}{t_3} F_3' = \frac{6}{t_2^2} (F_2 - F_1) + \frac{3}{t_3} (F_3 - F_2) \quad (9.38)$$

În mod similar accelerația la sfârșitul ultimului segment de curbă intermediară, în punctul de precizie  $M_{n-1}$ , este obținută din relației (9.34) pentru  $t = t_{n-1}$ :

$$F''(t_{n-1}) = 2C_2 + 6C_3t_{n-1} \quad (9.39)$$

unde coeficienții  $C_2$  și  $C_3$ , definiți de relația (9.15), pe intervalul de timp  $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$

au expresia:



$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{t_{k+2}} \left[ \frac{3(F_{k+2} - F_{k+1})}{t_{k+2}} - 2F'_{k+1} - F'_{k+2} \right] \\
C_3 &= \frac{1}{t_{k+2}^2} \left[ \frac{2(F_{k+1} - F_{k+2})}{t_{k+2}} + F'_{k+1} + F'_{k+2} \right]
\end{aligned} \tag{9.15a}$$

ce se particularizează pentru  $k = n - 1$ :

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{t_{n-1}} \left[ \frac{3(F_{n-1} - F_{n-2})}{t_{n-1}} - 2F'_{n-2} - F'_{n-1} \right] \\
C_3 &= \frac{1}{t_{n-1}^2} \left[ \frac{2(F_{n-2} - F_{n-1})}{t_{n-1}} + F'_{n-2} + F'_{n-1} \right]
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Cu aceste precizări relația (9.38) devine:

$$F''(t_{n-1}) = \frac{6}{t_{n-1}^2} F_{n-2} - \frac{6}{t_{n-1}^2} F_{n-1} + \frac{2}{t_{n-1}} F'_{n-2} + \frac{4}{t_{n-1}} F'_{n-1} \tag{9.41}$$

La începutul segmentului final, pentru  $t_n = 0$ , accelerația este definită de derivata a doua a funcției polinomiale de ordinul patru, prin a treia ecuație din relația (9.30):

$$F''(0) = 2C_2 \tag{9.42}$$

unde coeficientul  $C_2$  este definit de relația (9.31):

$$F''(0) = \frac{2}{t_n^2} (6F_n - 6F_{n-1} - 3F'_{n-1}t_n) \tag{9.43}$$

Egalând relațiile (9.40) cu (9.41) rezultă:

$$F''(t_{n-1}) = F''(t_n = 0) \tag{9.44}$$

se obține:

$$\frac{1}{t_{n-1}} F'_{n-2} + \left( \frac{2}{t_{n-1}} + \frac{3}{t_n} \right) F'_{n-1} = \frac{3}{t_{n-1}^2} (F_{n-1} - F_{n-2}) + \frac{6}{t_n^2} (F_n - F_{n-1}) \tag{9.45}$$

Combinând relațiile (9.38) cu (9.45) cu relația (9.23), prin completarea primei linii cu relația (9.38) și a ultimei linii cu relația (9.45) se obține:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{t_3} + \frac{3}{t_2} & \frac{1}{t_3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_5 & 2(t_4 + t_5) & t_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_6 & 2(t_5 + t_6) & t_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_{n-1} & 2(t_{n-2} + t_{n-1}) & t_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{t_{n-1}} & \frac{2}{t_{n-1}} + \frac{3}{t_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \\ F'_5 \\ \vdots \\ F'_{n-2} \\ F'_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{t_3^2}(F_3 - F_2) + \frac{6}{t_2^2}(F_2 - F_1) \\ \frac{3}{t_3 t_4} [t_3^2(F_4 - F_3) + t_4^2(F_3 - F_2)] \\ \frac{3}{t_4 t_5} [t_4^2(F_5 - F_4) + t_5^2(F_4 - F_3)] \\ \frac{3}{t_5 t_6} [t_5^2(F_6 - F_5) + t_6^2(F_5 - F_4)] \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-2} t_{n-1}} [t_{n-2}^2(F_{n-1} - F_{n-2}) + t_{n-1}^2(F_{n-2} - F_{n-3})] \\ \frac{3}{t_{n-1}^2}(F_{n-1} - F_{n-2}) + \frac{6}{t_n^2}(F_n - F_{n-1}) \end{Bmatrix} \quad (9.46)$$

Rezolvând sistemul matriceal al relației (9.46) se obțin toate valorile matricei vitezei  $[F']$ , definind astfel toate funcțiile polinomiale de gradul trei și patru utilizate pentru aproximare traiectoriei prescrise în planul mișcării.

Extinzând metoda prezentată pentru toate cele  $M$  cuple cinematice conducătoare ale unui robot industrial, ceea ce conduce la un maxim de  $(n-1) \cdot M$  funcții polinomiale pentru o traiectorie aproximată prin  $n$  puncte de precizie.

Valorile extreme ale vitezelor se pot exprima printr-un factor:

$$S_v = \max_j \left[ \frac{\max_i (|F'_{ij}(t)|): 0 \leq t \leq t_{i+1}}{V_{ij}} \right] \quad (9.47)$$

unde  $V_{ij}$  – viteza de regim a unei cuple cinematice conducătoare  $j$ , pentru  $j = \overline{1, M}$ ;

$F'_{ij}$  – viteza pe segmentul de curba  $i$ , prin acționarea cuplei cinematice conducătoare  $j$ .

Valorile extreme ale accelerațiilor se pot exprima de asemenea printr-un factor:

$$S_a = \max_j \left[ \frac{\max_i (|F''_{ij}(t)|): 0 \leq t \leq t_{i+1}}{a_{ij}} \right] \quad (9.48)$$

unde  $a_{ij}$  – accelerația de regim a cuplei cinematice conducătoare  $j$ , pentru  $j = \overline{1, M}$ ;

$F''_{ij}$  – accelerația pe segmentul de curba  $i$ , prin acționarea cuplei cinematice conducătoare  $j$ .

Valoarea optimă a factorului  $S$  este:

$$S = \max. (S_v, S_a) \quad (9.48)$$